This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Google

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
372
.B894

CALCOLO INTEGRALE

DELLE

EQUAZIONI LINEARI

DEL

D. VINCENZIO BRUNACCI 1768-1818

DI FIRENZE

PROFESSORE DI MATEMATICA E NAVIGAZIONE

NELLA

REAL MARINA DI LIVORNO

E SOCIO DI VARIE ACCADEMIE

FIRENZE 1798.

PRESSO PIETRO ALLEGRINI STAMP. ALLA CROCE ROSSA.

Con Approvazione.

DISCORSO PRELIMINARE

Per quanto il Calcolo infinitesimale dopo le scoperte dei Newton e dei Leibnitz, sia stato dai Bernoulli, de l' Hôpital, Euleri, La-Grange ed altri molti insigni Geometri spinto tanto avanti, da somministrar dei fecondissimi metodi per la soluzion di problemi che gli antichi avrebbero appena potuti immaginar risolubili, pure esso è ben lontano dal grado di perfezione, cui un giorno è per giungere. Dipende dagli sforzi riuniti dei Geometri il ridurre a quel grado l' Analisi sublime. La perfezion delle parti conduce necessariamente alla perfezione del tutto; quindi è che ha ben dritto all' altrui riconoscenza quel Geometra, che procuri se non di tutto riconoscere questo vasto pelago per fare ivi delle nuove scoperte, almeno di disegnarne con precisione una parte.

Egli è però vero che i Geometri del nostro tempo sono in peggior condizione di quei che gli hanno preceduti, in ciò che riguarda la facilità di riconoscere dei nuovi rapporti delle quantità nella Scienza Analitica. Un Geometra, di quegli che l' avara Natura manda di rado sopra la terra, penetra considerando le quantità fino nell' infinito, getta i fondamenti di una nuova Scienza e producendo un' utile rivoluzione nelle Matematiche, le fa cangiar di faccia. Aperta una nuova carriera i Geometri,

370230

10 Nov. 21 EH.V.

figli meno privilegiati della natura, seguitando più da vicino lo scopritore non s' acquistano minor lode di lui e gareggiano con esso nelle scoperte. Nè i Cortez nè i Pizzarri avrebbero scoperto il Messico ed il Perù, se Colombo con petto armato d' un triplice bronzo, non avesse penetrato l' Oceano fino a scoprir le Antille e a riconoscere il Continente del nuovo Mondo. Dopo il primo passo vi è molto del facile e questo subito si presenta; di modo che a tutto avuto riguardo, la prossimità alla perfezione che un Geometra procuri a qualche ramo d' Analisi, non può essere considerata di lieve momento nello stato attuale della Scienza medesima. Incoraggito da tali riflessioni, ho tutte le mie forze impiegate a coltivar più particolarmente qualche parte di Scienza, e dopo aver pubblicato nel 1795.--96. il Trattato di Navigazione ad uso dei Piloti, del quale mi servo nelle mie Lezioni, rivolto al Calcolo Infinitesimale, ho composta l' Opera di cui vado a parlare.

I problemi, la soluzion dei quali dal Calcolo Integrale dipende, conducono ad equazioni differenziali che bisogna integrare per avere le loro soluzioni medesime; e nell' integrar tali equazioni differenziali, quasi tutta consiste la difficoltà di quel calcolo. L' equazioni lineari, quelle cioè nelle quali le differenze delle funzioni variabili non sono alzate a potenze maggiori dell' unità, sono le sole per le quali esistano dei metodi generali per integrarle la lor condizione ha somministrate ai Geometri delle risorse da potere a loro riguardo immaginar dei metodi, che nulla affatto all' altre equazioni sono applicabili; e se questi metodi privi si riscontrassero d' alcuni difetti inerenti alla loro natura, questa porzion di cal-

colo si potrebbe considerar giunta a qualche grado di perfezione. Se infatti si parli delle equazioni lineari a differenze finite o infinitesime, tutto ciò che riguarda l' integrazion delle medesime si riduce alla ricerca dell' integrale completo d' una qualunque equazione lineare di un ordine n^{esimo}.

Il Caso più semplice è quando i coefficienti di questa equazione son costanti, e per esso è stata data la soluzione completa.

Tutti i ritrovati metodi per altro dipendendo dalla risoluzion d' una equazione algebraica del grado medesimo dell' ordine dell' equazion differenziale proposta, danno gl' integrali completi soltanto quando le radici dell' equazione algebraica da risolversi son diseguali: se alcune di quelle radici sono eguali fra loro, gl' integrali divengono incompleti, ed i metodi più non corrispondono a quelle vedute per cui erano stati inventati.

Sentiron i Geometri questa difficoltà, e piuttosto che ricercar dei nuovi metodi che ne fossero liberi, s' applicarono ad immaginar degl' artifizi d' analisi per correggerne i risultati. L' immortale d' Alembert che è stato seguito da tutti, immaginò di render completi quegl' integrali, che per cagion delle radici eguali non eran tali, per mezzo di un metodo fondato in questa supposizione „ due quantità eguali posson considerarsi differir fra loro di una quantità piccolissima „ *Questo principio estraneo affatto alla natura della questione per cui è adoprato, è falso in rigore e non può ammettersi nello stato attuale dell' analisi. Vedremo nel corso dell' Opera come da quello s' abbiano degli esatti risultati e si spiegherà un tal paradosso analitico.*

A tutto questo e ad altro che non preme citare, avendo io posta mente, mi son determinato a scrivere sul Calcolo Integrale dell' equazioni lineari, trattando non solo di quelle di cui sopra ho parlato, ma ancora dell' equazioni a differenze parziali finite, e infinitesime. In quest' ultime due soli casi dotati di qualche generalità erano stati dai Geometri considerati, e risoluti completamente.

Divido il mio Trattato in quattro Capitoli. Nel primo parlo delle equazioni lineari a differenze finite. Incominciando a trattar di quelle che hanno i coefficienti costanti, espongo un nuovo metodo per la loro integrazione. Questo metodo dipende anch' esso dalla risoluzion di una equazione algebraica d' un grado eguale all' ordine dell' equazion lineare; ma i risultati che dal medesimo ottengo, rappresentano sempre gl' integrali completi, qualunque siano le radici, eguali o diseguali fra loro. Le formole generali date dai Geometri per l' integrazion di tali equazioni si deducono dai miei risultati e non ne sono in conseguenza che un corollario. Per indagare ancora più la natura degl' integrali delle equazioni lineari, m' applico ad esaminare i risultati che i Geometri ci hanno dati fin ora.

L' integrazione d' un' equazion lineare dell' ordine n^mo^ *dipende dalla risoluzion d' un' equazione algebraica del medesimo grado. Ora se i coefficienti della proposta equazione son tali, che l' equazione algebraica abbia delle radici eguali, gl' integrali dati dai medesimi Geometri divengono incompleti. Questo difetto avendo la sua origine dalla natura dei coefficienti, egli è evidente che qualunque metodo per ricompletare gl' integrali, che non dipenda dalla*

natura dei medesimi unico dato del problema, è affatto estraneo alla questione, e che se porta a dei risultati, i quali pur soddisfanno, convien dire che nel dato siano i principj per giungere a quei risultati, ed è solo questa combinazione, la quale può fare accettare un metodo, che per non dipendere affatto dalla questione, sarebbe rigettato. Tale appunto è il metodo del Geometra d' Alembert di cui ho quì sopra parlato, e che mi trattengo ad analizzare ai §. 20. e segg. di questo Capitolo: Ivi ne vedremo facilmente l' erroneità. Ma i risultati, si dirà da taluno, ai quali conduce son veri: ebbene; questi stessi devono potersi ricavare dalla natura dell' equazione da risolversi.

Fisso in questo principio, ho ricercato un metodo per giungere a questi risultati fondato sopra la natura della proposta equazione. La Teorìa dei limiti delle radici delle equazioni algebraiche ha pienamente soddisfatto alle mie vedute: ricavo da essa il metodo per ricompletare gl' integrali, ed ottengo per mezzo di questo i medesimi risultati che si avevano con quello di d' Alembert. Tanto più ho creduto bene trattenermi a ricercare un tal metodo, in quanto che nei due ultimi Capitoli di questo Libro, dei quali fra poco parlerò, mi si rendeva assolutamente necessario far uso di quello del citato Geometra, perchè i metodi d' integrazione che ivi espongo, ne hanno bisogno per condur sempre alla completa soluzion del problema.

Dopo aver considerate l' equazioni a coefficienti costanti passo alla considerazione di quelle a coefficienti variabili. Il medesimo principio di cui ho fatto uso per integrar le prime mi serve per le se-

conde; e dopo aver dimostrato il Teorema del Sig. La-Grange sopra tali equazioni, ne faccio l' applicazione all' integrazion delle equazioni del primo ordine. Venendo in seguito a quelle del secondo, delle quali ho parlato in altro tempo (a), *faccio osservare, che come quelle del primo suppongono l' integrazione delle funzioni esplicabili, quelle del secondo per integrarsi completamente dipendono dall' integrazione o somma delle funzioni inesplicabili, del che è facile persuadersi* a priori; *infatti l' integrazion delle equazioni del second' ordine dovendo in generale contener due segni sommatorj, e la somma di una funzione esplicabile essendo in generale una funzione inesplicabile, ne segue che gl' integrali delle equazioni del second' ordine richiedendo la somma della somma di una funzione esplicabile, dipenderanno da quella di una funzione inesplicabile, come si rileva dal calcolo.*

Vi sono nei gradi superiori alcune equazioni, le quali avendo i coefficienti variabili, ma soggettati ad una certa forma, ammettano sempre un integrale completo. Mi trattengo a dedurne dal mio metodo generale l' integrazione.

Continuando a sviluppar la teoria delle equazioni lineari a differenze finite, tratto dell' eliminazion delle variabili dalle equazioni differenziali, quindi delle equazioni a differenze variabili, esponendo i principj per i quali esse si possono ridurre ad aver le differenze costanti eguali all' unità. Data tutta la teorìa di questo genere d' equazioni, era

---

(a) Opuscolo Analitico stamp. a Livorno nel 1792.

era necessario mostrar l' uso di lei nella scienza delle quantità; per questo faccio osservare come nelle serie ricorrenti abbiano le cose dette una immediata applicazione, quando si ricerca il termine generale delle medesime o la loro somma, fra le quali quantità esiste tal rapporto, per cui ambedue dipendono da una equazione a differenze finite dello stesso ordine, anzi della medesima equazione, e termino il Capitolo con l' applicazione ad alcuni problemi sopra le probabilità, e alla determinazione delle funzioni arbitrarie, le quali entrano negl' integrali completi delle equazioni a differenze parziali.

Nel secondo tratto delle equazioni lineari a differenze infinitesime. Il metodo che espongo per ottener gl' integrali di tali equazioni dipende, egualmente che gl' altri fin' ora immaginati per il caso che i coefficienti siano costanti, dalla risoluzione di una equazione algebraica di un grado eguale all' ordine della proposta; ha però sopra di questi il vantaggio di dar sempre gl' integrali completi qualunque siano le radici dell' equazione algebraica da risolversi, eguali o disegnali fra loro. Come corollario delle nostre formole si ritrovano quelle fin ad ora conosciute dai Geometri, le quali sono prive del necessario numero di costanti arbitrarie nel caso dell' eguaglianza delle radici. Lasciando a parte il metodo di d' Alembert, di cui ho dimostrata l' inesattezza, faccio uso della Teoria dei limiti delle radici dell' equazioni per ricompletare quelle formole, come nell' equazioni del Cap. I.

Dopo aver considerati i coefficienti costanti, passo all' equazioni differenziali a coefficienti variabili, e dopo avere esposto il mio metodo per la loro inte-

§§

grazione, deduco da esso le regole ed i Teoremi che ne sono stati ritrovati fin ora.

Infine con l' esporre l' integrazioni delle equazioni a coefficienti variabili di una determinata forma, l' eliminazion delle variabili da più equazioni differenziali e l' applicazione delle cose dette alle serie, termino questo Capitolo.

Nel terzo tratto l' equazioni lineari a differenze finite e parziali. Per il caso dei coefficienti costanti faccio uso dei metodi dati dall' insigne Geometra La-Grange in una sua memoria inserita fra quelle dell' Accademia di Berlino del 1775., *mi servo per altro di un ragionamento affatto diverso da quello di questo gran Geometra per introdur le funzioni arbitrarie nelle formole, che esprimono gl' integrali dell' equazioni: ragionamento che ho creduto dover preferire all' altro, perchè fondato nella natura del problema. Questo ha di più il vantaggio di mostrare subito che cosa indicano le funzioni arbitrarie, e come necessariamente vengano negl' integrali completi di tali equazioni.*

Tutti questi metodi però hanno il difetto di dar risultati incompleti quando l' equazioni algebraiche da cui dipendono hanno alcune delle radici eguali. Il medesimo principio d' Algebra Cartesiana di cui ho fatto uso per i casi analoghi negli altri Capitoli, serve in questo per ricompletar quei risultati; e dopo avere sviluppata questa Teorìa da non aver bisogno d' inviare i nostri leggitori a consultar la citata Memoria, passo a farne vedere l' estesissimo uso nella Teorìa delle serie recurro-recurrenti. *Venendo poi all' equazioni a coefficienti variabili, do l' integrazione d' alcune equazioni, che in virtù di una*

certa forma ammettono un integrale completo, e termino con l'esporre il metodo immaginato dal Sig. La-Place per integrar l'equazioni a coefficienti variabili, metodo che ho voluto sviluppare con tutta la chiarezza possibile applicandolo a degli esempi.

Il quarto ed ultimo Capitolo finalmente contiene la teorìa dell'integrazione delle equazioni lineari a differenze infinitesime e parziali. Il metodo generale e semplicissimo insieme, che ho immaginato per l'integrazione di quelle equazioni a coefficienti costanti, dipende dalla risoluzione di un'equazione algebraica fra due incognite. Tutte le volte che tale equazione è decomponibile in fattori di primo grado, l'integrale completo della proposta si può ottenere in termini finiti, e in generale sarà quell'integrale sempre completato da tante funzioni arbitrarie, quanto è l'ordine dell'equazione differenziale. Quando però quella decomposizione non accade, l'integrale completo non si può avere che espresso in serie infinite, mentre se ne può ottenere una infinità d'integrali ma particolari, espressi in termini finiti.

Venendo alle equazioni a coefficienti variabili, incomincio da considerar quelle in cui sono i coefficienti funzioni di una sola variabile, delle quali non si può in generale assegnar l'integrale completo che espresso in serie infinite, quindi trattando di quelle che hanno i coefficienti funzioni di più variabili, do gl'integrali completi dell'equazioni, che ne sono suscettibili, in virtù di certe forme particolari dei loro coefficienti medesimi.

Nelle equazioni di cui si parla qui, due soltanto erano i casi dotati di qualche generalità, che

fossero stati completamente risoluti dai Geometri: questi risultano come semplici corollari delle mie formole generali.

Rapporto alla determinazione delle funzioni arbitrarie, il metodo col quale le abbiamo introdotte, passando dagl' integrali particolari agl' integrali completi, mostra ad evidenza quali devono essere i dati per determinarle. Esse dipendono dallo stato dell' integrale quando una delle variabili è zero, o ha un valor determinato.

L' ordine avrebbe richiesto che io parlassi ancora dell' integrazione di quelle equazioni lineari che hanno i coefficienti funzioni qualunque di più variabili, il che avrei eseguito se il volume del Libro non fosse andato al di là dei limiti da me prescrittigli. I metodi immaginati dai Geometri La-Place, Monge ed altri, come pure l' applicazioni delle superiori teorie alle Scienze Fisiche dovevano formare un' ultima parte di questo Capitolo, ma per ora ho soppressa tutta quella porzione di manoscritto che gli riguarda, ed ho posto fine a questo trattato.

Mi resta a dir qualche cosa dell' appendice che si trova alla fine del medesimo. Terminata l' edizione dei quattro Capitoli, di cui ho sopra parlato, mi venne in idea di far uso della variazion delle costanti che portano gl' integrali per adattare i metodi d' integrazione, dati per l' equazioni a coefficienti costanti, all' integrazione di quelle, che hanno i cofficienti variabili: in quest' appendice espongo alcuni metodi che dipendono da un tal principio, per mezzo dei quali s' ottengono l' integrazioni di molte equazioni che sarebbe inutile ricercar per altre vie.

Siccome nello ſcriver queſto Trattato ho avuto in animo non ſolo di preſentar quel poco che può contener di nuovo e d' intereſſante ai Geometri di profeſſione, quanto ancora di ſervire all' iſtruzion di quelli che allo ſtudio della analiſi ſublime s' applicano, così ho avuta ogni cura per eſſer facile quanto è compatibile con la materia che tratto. In un libro di Matematica la difficoltà deve naſcere dalla ſublimità delle coſe e non dalla maniera d' eſporle. Servirà che il mio Lettore abbia ſtudiate, oltre l' Algebra Carteſiana, le prime linee di calcolo differenziale e integrale per potere intendere da ſe ſteſſo e ſenza biſogno d' alcun maeſtro tutte le Teorìe, che ho trattate in queſt' opera, la quale ſicuramente non ſarebbe comparſa alla luce, ſe una Perſona pratica della Scienza (a) *non aveſſe giudicata degna di comparirvi per vantaggio della Scienza cui appartiene, e ſe la Munificenza del Real Sovrano* FERDINANDO III. *non mi aveſſe ſollevato in parte dalle ſpeſe dell' Edizione.*

(a) Il P. Canovai delle Scuole Pie.

INDICE DELLE MATERIE

	Parag.	car.
CAP. I. Dell' equazioni lineari a differenze finite		
Cosa s'intende per equazioni lineari a differenze finite	1	1
Metodo generale per integrare le dette equazioni	4	3
Formola per l'integrale completo di dette equazioni	13	12
Formola per l'integrale completo, quando il secondo membro dell'equazione è zero	16	17
Deduzione da detta formola della già conosciuta per un simil caso	ivi	19
Difetto della formola conosciuta per il caso delle radici eguali	17	19
Maniera di rimediarvi dedotta dalla formola del §. 16.	18	20
Esame del Metodo del Geometra d'Alembert per rendere completi gl' integrali	20	22
Metodo per rendere completi gl' integrali dedotto dalla natura stessa delle equazioni, che hanno le radici eguali	25	26
Metodo per dedurre dalla formola del §. 13., la formola dell' integrale completo fin ora data dai Geometri	32	31
Difetto al quale è soggetta nel caso delle radici eguali	33	32
Integrazione delle aquazioni lineari a coefficienti variabili	34	34
Teorema del Geometra La-Grange per l'integrazione di queste equazioni	36	38

	Paragr.	car.
Integrale dell' equazioni di primo ordine . .	37	38
L' integrale di quelle del secondo dipende dalla somma di una funzione inesplicabile . . .	38	41
Integrazione d' alcune equazioni degl' ordini superiori a coefficienti variabili, che ammettono un integrale completo	39	43
Integrazione delle equazioni fra un maggior numero di variabili	44	50
Integrazione delle equazioni a differenze variabili	52	57
Esame sopra le quantità immaginarie contenute negl' integrali, e sopra il valore delle costanti arbitrarie	57	65
Applicazioni alla ricerca del termine generale nelle serie recurrenti	58	68
Rapporto fra la somma e il termine generale delle medesime serie	60	71
Applicazioni alla soluzione di alcuni problemi sopra le probabilità	65	78
Applicazioni alla determinazione delle funzioni, che entrano negl' integrali completi delle equazioni a differenze parziali	66	80
CAP. II. Delle equazioni lineari a differenze infinitesime		
Cosa siano tali equazioni	1	85
Metodo per integrarle	2	86
Formola dell' integrale completo	5	91
Integrale per il caso in cui il secondo membro è nullo	7	96
Integrale completo per il caso delle radici eguali	8	98
Difetto delle formole fin ora conosciute per questo caso	9	102
Metodo di correggere questi difetti dedotto dalla natura dell' equazioni	10	104
Equazioni a coefficienti variabili, e Teoremi, che riguardano la di loro integrazione . . .	15 e seg.	109

Inte-

Paragr. car.

Integrazione d' alcune equazioni a coefficienti variabili di una certa forma 19 115
Integrazione delle equazioni fra più variabili . . 23 123
Considerazione delle radici immaginarie . . . 26 130
Applicazioni ad alcuni esempi 27 131
Uso delle medesime integrazioni nelle serie . . 29 136
CAP. III. Delle Equazioni lineari a differenze finite e parziali
Definizione di queste equazioni 1 138
Integrazione delle medesime equazioni quando i coefficienti sono costanti . . . . 2 e seg. 140
Metodo generale per integrare in termini finiti l' equazioni di qualunque ordine 13 160
Considerazione sopra gl' integrali particolari dell' equazioni nel caso delle radici eguali . . . 19 170
Metodo per ridurli di nuovo completi . . . 20 171
Applicazioni alle serie *recurro - recurrenti* . . 23 175
Integrazione delle equazioni a un maggior numero di variabili 30 188
Integrazione delle equazioni quando il secondo membro non è nullo 32 190
Integrazione delle equazioni a coefficienti variabili 36 197
D' alcune equazioni, che ammettono sempre un integrale completo 41 206
Metodo del Sig. La - Place per integrare l' equazioni a coefficienti variabili 45 211
Applicazioni agl' esempi 50 217
CAP. IV. Delle equazioni lineari a differenze infinitesime e parziali.
Integrazione di queste equazioni a coefficienti costanti 1 223
Integrale di quelle del primo ordine 2 224
Integrale di quelle degl' ordini superiori, quando i coefficienti soddisfanno a una certa condizione 5 227

§§§

Paragr. car.

Integrale completo delle medesime equazioni quando i coefficienti non sono assoggettati a quella condizione, espresso per serie 7 228
Integrale particolare in termini finiti . . . 8 230
Integrazione delle equazioni nelle quali il secondo membro non è nullo 12 235
Integrali resi incompleti per causa delle radici eguali, e metodo per ricompletarli 13 237
Delle equazioni ad un maggior numero di variabili 18 242
Integrazione delle equazioni a coefficienti variabili 24 251
L'integrale completo di queste equazioni non può in generale esprimersi che per serie infinite 27 255
Integrale completo e finito dell' equazioni del primo ordine a coefficienti variabili . . . 28 257
Integrale completo d' alcune equazioni nel caso che i coefficienti abbiano una certa forma . . 29 258
Applicazioni a degl' esempi 33 267
Appendice sopra l' integrazione dell' equazioni lineari a coefficienti variabili.
Metodo per integrare l'equazioni lineari a coefficienti variabili, dedotto dalla variazione delle costanti . . . . 2 e seg. 271
Applicazione del medesimo metodo all' equazioni a differenze infinitesime e parziali a coefficienti variabili 6 276

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
13	10	$\alpha^{n}=3$	$\alpha''=3$
15	14	$\frac{n.n-1.n-2}{2.3}$	$-\frac{n.n-1.n-2}{2.3}$
16	4	$z_{x}+A$	$Z_{x}+A$
44	14	$\frac{X}{\alpha_{x+n}\delta^{(n-2)}}$	$\frac{X}{\alpha_{x+n}\delta^{(n-2)x}}$
45	22	$\Sigma\frac{\log(-\alpha_{x})}{\delta^{x+2}}$	$\Sigma\frac{\log(-\alpha_{x+2})}{\delta^{x+2}}$
64	3	$-\frac{Cba^{n-1}-b}{a-1}$	$\frac{-Cba^{n-1}-b}{a-1}$
80	28	$\varphi(\alpha'_{x+\omega})$	$\varphi(\alpha_{x+\omega})$
81	9	$\frac{T.q_{t}}{q'_{t}}$	$\frac{T.q'_{t}}{q_{t}}$
84	7	Ψt	φt
92	14	$p^{(n-2)}$	$p^{(n)}$
id.	16	$p^{(n-2)}=p^{(n-3)}=$	$p^{(n)}=p^{(n-1)}=$
100	4	n^{esime}	m^{esime}
107	14	$y=Ae^{\alpha x}.x^{2}$	$y=A''e^{\alpha x}.x^{2}$
118	2	$(m1-(n-1))q^{n-1}$	$(m1-(n-2))q^{n-1}$
122	24	(c)	(C)
141	1	m^{esimo}	n^{esimo}
145	12, 13	$(1+(B'-\frac{AC'}{B})\frac{1}{\omega})^{y}$	$(-\frac{B}{C'}(1+(B'-\frac{AC'}{B})\frac{1}{\omega})^{y}$
170	10	$A2.\beta^{y+2}$	$A2.\beta^{y+1}$
178	13	$z_{x-y,0}+$	$z_{x-y,0}+yz_{x-y-1,0}+$
190	14	$\alpha^{x}\beta^{y}(a+b\alpha+c\beta)$	$\alpha^{x}\beta^{y}(a+b\alpha+c\beta)^{n}$

Pag.	lin.		
194	4	$z_{x,0} - \omega_x - \omega_0$	$z_{x,0} - u_x - \omega_0$
211	5	$\varphi(y-3(x-1)-1)$	$\varphi(y-3(x-1)-2)$
216	17	$\alpha(x-1)$	$\alpha^{(x-1)}$
217	4	$\frac{B_1^y}{T_x} \Sigma \frac{B_2^y}{B_2^y}$	$\frac{B_1^y}{T_x} \Sigma \frac{B_2^y}{B_1^y}$
220	2	A_x^{x+2}	A_x^{x-2}
221	4	$-\frac{3.4}{4} A''_2) = \frac{1}{3} A_1$	$-\frac{3.4}{4} A'_2) = -\frac{1}{3} A_1$
233	10	$e^{\frac{\beta}{b} - \frac{a}{b} x + \beta y}$	$e^{\frac{\beta}{b} x - \frac{a}{b} x + \beta y}$
d.	11	$e^{\frac{\beta}{b'} - \frac{a'}{b'} x + \beta y}$	$e^{\frac{\beta}{b'} x - \frac{a'}{b'} x + \beta y}$
237	24	$nP^{(n-1)} \beta^{n-1}$	$nP^{(n)} \beta^{n-1}$
244	3	$e^{\alpha(x+\omega)+\beta(y+\omega)}$	$e^{\alpha(x+\omega)+\beta(y+\omega')}$
d.	19	$a+by$	$y+cu$
253	15	$\frac{X}{B_x}$	$\frac{X}{B_x} dx$
254	9	$T'' \beta^2 +$ ec.	$T'' \beta^2 +$ ec. essendo T, T', T'' ec. funzioni
262	2	$(a+bx)^{h''} ((a+bx)^{g'} (a'+b'y))E''$	$(a+bx)^{h''} ((a+bx)^{g''} (a'+b'y))E''$

Se ne sono lasciati alcuni che il Lettore può riconoscere a colpo d' occhio.

CALCOLO INTEGRALE

DELLE EQUAZIONI LINEARI

CAPITOLO I.

Dell' equazioni lineari a differenze finite.

§. 1. Se per y_x si rappresenta una funzione qualunque di x, e per Δy_x, $\Delta^2 y_x$, ec. $\Delta^n y_x$ le differenze finite prima, seconda, ec. n^{esima} della medesima funzione, una equazione fra essa, le di lei differenze finite e altre quantità conosciute si chiama *una equazione a differenze finite:* Se in questa equazione le differenze finite, come pure la funzione y_x vi sono sotto una forma lineare, l' equazione si chiama allora una equazione *lineare* a differenze finite; così la forma generale di una tale equazione sarà
$a . y_x + b . \Delta y_x + c . \Delta^2 y_x + \; . \; . \; . \; . + p . \Delta^n y_x = X$. Le quantità a, b, c, ec. X possono essere o costanti o variabili.

Quell' equazione si dice *dell' ordine* n, prendendo il nome dal più alto ordine delle differenze che in essa si trovano.

§. 2. Se si suppone che y_{x+1} sia ciò che diviene y_x quando vi si pone $x + 1$ invece di x, cioè quando x cresce della differenza finita Δx, che ora supponghiamo l' unità; che y_{x+2} rappresenti ciò che diviene y_{x+1} ponendovi $x + 1$ invece di x, e così di seguito, avremo per ciò che si dimostra nei principj del calcolo differenziale

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$
$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$
$$\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$$
. . . .

. . . .

$$\Delta^n . y_x = y_{x+n} - ny_{x+n-1} + \frac{n.n-1}{2} y_{x+n-2} \ldots \pm y_x$$

I coefficienti in questa ultima espressione sono quelli del binomio di Newton. Il segno + all' ultimo termine vale per n pari, il – per n impari.

Se ora si sostituiscono queste espressioni delle differenze nell' equazione lineare del §. antecedente, la renderemo di questa forma
$Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} + \ldots Py_{x+n} = X$ nella quale A, B, C, ec. P saranno funzioni dei coefficienti, che moltiplicano y_x, Δy_x, $\Delta^2 y_x$, ec. e della quantità n. I valori di tali funzioni sono i seguenti

$$A = a - b + c - d + \ldots \ldots \pm p$$
$$B = b - 2c + 3d + \ldots \ldots \mp np$$
$$C = c - 3d + \ldots \ldots \pm n.\frac{n-1}{2}p$$
. . . .

. . . .

$$P = p$$

Per esempio se si abbia l' equazione del secondo ordine $ay_x + b\Delta y_x + c\Delta^2 y_x = X$, si ponga $y_{x+1} - y_x$ invece di Δy_x; e $y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$ invece di $\Delta^2 y_x$, ed avremo
$ay_x + b(y_{x+1} - y_x) + c(y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x) = X$ la quale si riduce a
$(a - b + c) y_x + (b - 2c) y_{x+1} + cy_{x+2} = X$, che è della forma

$Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} = X$ facendo $A = a - b + c$, $B = b - 2c$, $C = c$.

Poichè dunque ogni equazione fra la funzione y_x e le sue differenze finite, si può facilmente ridurre ad una equazione fra la medesima funzione, e le funzioni y_{x+1}, y_{x+2}, ec. y_{x+n}, perciò noi chiameremo *equazione lineare a differenze finite dell' ordine n*, una equazione fra y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ec. y_{x+n} nella quale queste funzioni entrino sotto una forma lineare.

§. 3. Ci proporremo adunque di trovare l'integrale completo dell'equazione lineare dell'ordine n.

(A) . . $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + py_{x+n} = X$; di trovare cioè per y_x una tale espressione in x, che contenga un numero n di costanti arbitrarie; e che ponendovi $x+1$ invece di x a fine di avere y_{x+1}, $x+2$ per x a fine di avere y_{x+2}, e così di seguito, e quindi sostituendo le espressioni di y_x, y_{x+1} ec. y_{x+n} nella proposta, questa si riduca ad un equazione identica.

Cominciamo dal supporre i coefficienti costanti, e che X rappresenti una funzione qualunque data di x.

§. 4. Per riuscire in questa ricerca supporremo che y_x sia una funzione di x di questa forma $\alpha^x . \Sigma z_x \Delta x$, essendo α una costante da determinarsi, Σ il solito segno sommatorio, z_x una funzione di x parimente da determinarsi, e Δx la differenza finita dell'x.

Siccome noi supponghiamo la differenza dell'x eguale all'unità, perciò $\Delta x = 1$, onde $y_x = \alpha^x . \Sigma z_x$: dal che si ricava che sarà

$$y_{x+1} = \alpha^{x+1} \Sigma z_{x+1}$$
$$y_{x+2} = \alpha^{x+2} \Sigma z_{x+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{x+n} = \alpha^{x+n} . \Sigma z_{x+n}$$

E siccome, secondo i principj del calcolo integrale finito, Σy_{x+n} esprime l'aggregato di tutti i termini che precedono z_{x+n} nella serie z_0, z_1, z_2, z_3, ec. avremo per questo

$$\Sigma z_x = z_{x-1} + z_{x-2} + z_{x-3} + \ldots + z_0$$
$$\Sigma z_{x+1} = z_x + z_{x-1} + z_{x-2} + \ldots + z_0 = z_x + \Sigma z_x$$
$$\Sigma z_{x+2} = z_{x+1} + z_x + z_{x-1} + \ldots + z_0 = z_{x+1} + z_x + \Sigma z_x$$
. . . .

. . . .

$$\Sigma z_{x+n} = z_{x+n-1} + z_{x+n-2} \ldots + z_x + z_{x-1} \ldots + z_0 = z_{x+n-1} + z_{x+n-2} \ldots + z_x + \Sigma z_x.$$

Le espressioni adunque per y_x, y_{x+1}, ec. y_{x+n} diverranno.

$$y_x = \alpha^x . \Sigma z_x$$
$$y_{x+1} = \alpha^{x+1} (\Sigma z_x + z_x)$$
$$y_{x+2} = \alpha^{x+2} (\Sigma z_x + z_{x+1} + z_x)$$
$$y_{x+3} = \alpha^{x+3} (\Sigma z_x + z_{x+2} + z_{x+1} + z_x)$$
. . . .

. . . .

$$y_{x+n} = \alpha^{x+n} (\Sigma z_x + z_{x+n-1} + z_{x+n-2} + \ldots \ldots + z_{x+1} + z_x).$$

Ma per maggiormente facilitare l'intelligenza del metodo, che anderemo ad esporne, supponghiamo per adesso $n = 2$, che cioè si abbia da integrare l'equazione (A) . . . . . $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} = X$. Avremo per questo caso $y_x = \alpha^x \Sigma z_x, y_{x+1} = \alpha^{x+1} (\Sigma z_x + z_x), y_{x+2} = \alpha^{x+2} (\Sigma z_x + z_{x+1} + z_x)$, e fatte le sostituzioni nelle equazioni da integrarsi, questa diverrà $a\alpha^x \Sigma z_x + b\alpha^{x+1} (\Sigma z_x + z_x) + c\alpha^{x+2} (\Sigma z_x + z_{x+1} + z_x) = X$, la quale si riduce a, $(a\alpha^x + b\alpha^{x+1} +$

$c\alpha^{x+2})\Sigma z_x + (b\alpha^{x+1} + c\alpha^{x+2}) z_x + c\alpha^{x+2} . z_{x+1} = X$.

Ora facendo il coefficiente di Σz_x eguale a zero avremo dopo aver diviso per α^x, l'equazione (1) . . . $a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$, equazione algebraica del secondo grado che ci deve determinare la costante α.

Per determinare z_x rimarrà l'equazione, (B) . . . $(b\alpha + c\alpha^2) z_x + c\alpha^2 . z_{x+1} = \frac{X}{\alpha^x}$, equazione lineare del primo ordine. Per risolverla si faccia come sopra $z_x = \alpha_1{}^x \Sigma z'_x$ essendo α_1 una costante e z'_x una funzione di x ambedue da determinarsi, e s'avrà $z_{x+1} = \alpha_1{}^{x+1} \Sigma z'_{x+1} = \alpha_1{}^{x+1} (\Sigma z'_x + z'_x)$. Sostituendo questo valore di z_{x+1} nell'equazione (B), avremo $(b\alpha + c\alpha^2) \alpha_1{}^x . \Sigma z'_x + c\alpha^2 . \alpha_1{}^{x+1} . (\Sigma z'_x + z'_x) = \frac{X}{\alpha^x}$ ovvero riducendola, $\alpha_1{}^x (b\alpha + c\alpha^2 + c\alpha^2 . \alpha_1) \Sigma z'_x + c\alpha^2 . \alpha_1{}^{x+1} . z'_x = \frac{X}{\alpha^x}$; e facendo il coefficiente di $\Sigma z'_x$ eguale a zero, avremo per determinare α_1 questa equazione algebraica (2) . . . $b\alpha + c\alpha^2 + c\alpha^2 . \alpha_1 = 0$, e per determinare z'_x questa equazione (C) . . . $c\alpha^2 . \alpha_1{}^{x+1} . z'_x = \frac{X}{\alpha^x}$, dalla quale si ricava $z'_x = \frac{X}{c\alpha^2 . \alpha_1 . \alpha^x . \alpha_1{}^x}$. Ora sostituendo questo valore in z_x avremo $z_x = \alpha_1{}^x \Sigma \frac{X}{c\alpha^2 . \alpha_1 . \alpha^x . \alpha_1{}^x}$; e sostituendo questo ultimo valore in y_x avremo $y_x = \alpha^x \Sigma \alpha_1{}^x \Sigma \frac{X}{c\alpha^2 . \alpha_1 . \alpha^x . \alpha_1{}^x}$; E questo sarà l'integrale completo della proposta; Infatti tale espressione soddisfà all'equazione (A) e contiene ancora due costanti arbitrarie, le quali sono introdotte dai segni sommatori. Le costanti α, α_1 si hanno per mezzo della risoluzione delle due equazioni (1), (2); anzi risoluta l'equazione (1) ci possiamo dispensare dal-

la risoluzione dell'equazione (2) per avere il valore di α_1 come vedremo in seguito.

§. 5. Riprendiamo adesso ad integrare l'equazione Generale (A) dell'ordine n^{esimo} proposta al §. 3. Se in essa vi si sostituiscono i valori di y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ec. y_{x+n} trovati al principio del §. antecedente, avremo dopo averla ordinata secondo le differenti funzioni $\Sigma z_x, z_x, z_{x+1}$, ec. z_{x+n-1}, avremo dico questa equazione

$$\left.\begin{array}{l} (a\alpha^x + b\alpha^{x+1} + c\alpha^{x+2} + \ldots + p\alpha^{x+n})\Sigma z_x \\ \quad + (b\alpha^{x+1} + c\alpha^{x+2} + \ldots + p\alpha^{x+n}).z_x \\ \quad + (c\alpha^{x+2} + \ldots + p\alpha^{x+n}).z_{x+1} \\ \quad + \\ \quad + \ldots \\ \quad\quad + p\alpha^{x+n}.z_{x+n-1} \end{array}\right\} = X.$$

Se adesso si suppone che il coefficiente del primo termine di questa equazione sia zero, avremo, dopo di aver diviso per α^x, per determinare α l'equazione del grado n^{esimo}

(1) . . . $a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$; e per determinare z_x, l'equazione di questa forma

(B) . . . $\alpha^x(b'z_x + c'z_{x+1} + d'z_{x+2} + \ldots + p'z_{x+n-1}) = X$, che è una equazione lineare a differenze finite dell'ordine $n-1$, a coefficienti costanti, poichè α^x si può passare nell' altro membro come divisore dell' X; l'equazione (B) diviene allora

(B) . . . $b'z_x + c'z_{x+1} + d'z_{x+2} + \ldots + p'z_{x+n-1} = \frac{X}{\alpha^x}$.

E' facile vedere che i coefficienti di questa equazione sono

$$b' = b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n$$
$$c' = c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n$$
$$d' = d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n$$

$$p' = pa^n.$$

La costante a si suppone conosciuta, poichè essa dipende dalla risoluzione dell' equazione algebraica (1). E perciò una delle sue radici.

L' integrazione adunque dell' equazione dell' ordine n si è ridotta all' integrazione di una equazione di un ordine inferiore di una unità.

§. 6. Per determinare z_x, cioè per integrare l' equazione (B) seguendo il medesimo andamento, che si è tenuto al §. 4. facciamo $z_x = a_1^x \Sigma z'_x$ essendo a_1 una costante e z'_x una funzione di x ambedue da determinarsi. Facendo sopra z_x e z'_x le medesime riflessioni, che abbiamo fatte sopra y_x e z_x avremo

$$z_x = a_1^x . \Sigma z'_x$$
$$z_{x+1} = a_1^{x+1} (\Sigma z'_x + z'_x)$$
$$z_{x+2} = a_1^{x+2} (\Sigma z'_x + z'_x + z'_{x+1})$$
$$\dots\dots\dots$$
$$z_{x+n-1} = a_1^{x+n-1} (\Sigma z'_x + z_{x+n-2} + z_{x+n-3} + \dots + z_x)$$

e sostituendo queste espressioni nell' equazione (B) essa diverrà

$$\left.\begin{aligned}
&(b' a_1^x + c' a_1^{x+1} + d' a_1^{x+2} + \dots + p' a_1^{x+n-1}) \Sigma z'_x \\
&\quad + (c' a_1^{x+1} + d' a_1^{x+2} + \dots + p' a_1^{x+n-1}) z'_x \\
&\quad + (d' a_1^{x+2} + \dots + p' a_1^{x+n-1}) z'_{x+1} \\
&\quad + \dots\dots\dots \\
&\quad + \dots\dots\dots \\
&\qquad + p' a_1^{x+n-1} . z'_{x+n-2}
\end{aligned}\right\} = \frac{X}{a^x}.$$

Se adesso si suppone che il coefficiente del primo termine sia zero, avremo, dopo averlo diviso per α'_x, la seguente equazione algebraica del grado $n-1$ per determinare α_1

(2) . . . $b'+c'\alpha_1+d'\alpha_1^2+\ldots+p'\alpha_1^{n-1}=0$ e per determinare z'_x l'equazione della forma

(C) . . . $c''z'_x+d''z'_{x+1}+\ldots+p''z'_{x+n-2}=\frac{X}{\alpha_1^x.\alpha^x}$.

L'equazione (C) è una equazione lineare a differenze finite dell' ordine $n-2$, a coefficienti costanti, i quali sono

$$c''=c'\alpha_1+d'\alpha_1^2+\ldots+p'\alpha_1^{n-1}$$
$$d''=d'\alpha_1^2+\ldots\ldots+p'\alpha_1^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p''=p'\alpha_1^{n-1}$$

e questi sono quantità costanti conosciute, poichè α_1 è una radice dell'equazione (2).

Così la proposta sarà ridotta all'integrazione di una equazione di un ordine inferiore di due unità. Continuando il medesimo metodo si vedrà che facendo $z'_x=\alpha_2^x.\Sigma z''_x$ avremo per determinare α_2 l'equazione algebraica

(3) . . . $c''+d''\alpha_2+e''\alpha_2^2+\ldots+p''\alpha_2^{n-2}=0$ del grado $n-2$, e per determinare z''_x l' equazione dell' ordine $n-3$ della forma

(D) . . . $d'''z''_x+e'''z''_{x+1}+\ldots+p'''z''_{x+n-3}=\frac{X}{\alpha_2^x.\alpha_1^x.\alpha^x}$

ed in fine scemando sempre il grado dell'equazione algebraica da risolversi, e l'ordine dell'equazione da integrarsi si giungerà a queste due equazioni

(n) . . . $q^{(n-1)}+p^{(n-1)}\alpha_{n-1}=0$

(P)...

$$(P) \ldots p^{(n)} . z_x^{(n-1)} = \frac{X}{\alpha^x_{n-1} . \alpha^x_{n-2} \ldots \alpha^x_2 . \alpha^x_1 . \alpha^x}.$$

Dall'equazione (n), si ricava il valore della costante α_{n-1}, e dall'equazione (P) si ricava il valore della funzione $z_x^{(n-1)}$ così espresso

$$z_x^{(n-1)} = \frac{X}{p^{(n)} . \alpha^x_{n-1} . \alpha^x_{n-2} . \alpha^x_{n-3} \ldots \alpha^x_2 . \alpha^x_1 . \alpha^x}.$$

Rammentiamo quì, che le costanti α_{n-1}, α_{n-2}, ... α_2, α_1, α sono le radici dell'equazioni (n), ($n-1$), ... (3), (2), (1).

§. 7. Considerando adesso che $y_x = \alpha_x \Sigma z_x$, $z_x = \alpha_1^x \Sigma z'_x$, $z'_x = \alpha_2^x \Sigma z''_x$, ... $z_x^{(n-2)} = \alpha^x_{n-1} \Sigma z_x^{(n-1)}$ avremo facendo le successive sostituzioni così espresso l'integrale dell'equazione (A) proposta al §. 3.

$$y_x = \alpha^x \Sigma \alpha_1^x \Sigma \alpha_2^x \ldots \Sigma \alpha^x_{n-1} \Sigma \frac{X}{p^{(n)} . \alpha^x_{n-1} . \alpha^x_{n-2} \ldots \alpha^x_2 . \alpha^x_1 . \alpha^x}.$$

Siccome il valore di $p^{(n)}$ non è composto che del coefficiente p della proposta, e delle quantità costanti α, α_1, α_2, ec. esso perciò sarà ancora costante, e si potrà portare fuori dei segni sommatorj, avremo in conseguenza

$$y_x = \frac{\alpha^x}{p^{(n)}} \Sigma \alpha_1^x \Sigma \alpha_2^x \ldots \Sigma \alpha^x_{n-1} \Sigma \frac{X}{\alpha^x_{n-1} . \alpha^x_{n-2} \ldots \alpha^x_2 . \alpha^x_1 . \alpha^x}.$$

Siccome i segni sommatorj sono di numero n, questi introducono nell'integrale n costanti arbitrarie e perciò tale e-

spressione di y_x sarà l'integrale completo dell'equazione proposta.

§. 8. Se per giungere al valore completo di y_x si dovessero, come sembra a prima vista, risolvere tutte le equazioni (1),(2),(3), . . . (n) di numero n, che danno i valori di $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, ec. questo metodo sarebbe un poco complicato; ma siccome conosciute tutte le radici dell'equazione (1) cioè dell'equazione

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$$

Si trovano sul campo i valori di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$, così siamo dispensati dalla risoluzione di tutte le altre equazioni (2),(3), . . . (n). Andiamo a vedere tutto questo.

§. 9. L'equazione che determina α è

$$(1) \ldots a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0,$$

è quella che determina α_1, dopo avervi sostituito il valore dei coefficienti b', c', ec. p' trovati al §. 5., è

$$(2) \ldots (b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n) + (c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1 + (d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1^2 + (e\alpha^4 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1^3 + \ldots + p\alpha^n . \alpha_1^{n-1} = 0$$

Ora se si moltiplica per α_1 l'equazione (2), avremo

$$(b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1 + (c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1^2 + (d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1^3 + (e\alpha^4 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1^4 \ldots + p\alpha^n . \alpha_1^n = 0$$

equazione che si riduce a questa

$$b\alpha . \alpha_1 + c\alpha^2 . \alpha_1^2 + d\alpha^3 . \alpha_1^3 + e\alpha^4 . \alpha_1^4 + \ldots + p\alpha^n . \alpha_1^n + (c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1 + (d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1^2 + (e\alpha^4 + \ldots + p\alpha^n)\alpha_1^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n . \alpha_1^{n-1} = 0.$$

Ora se questa equazione si sottrae dall' equazione (2) resterà l'equazione

$b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n - (b\alpha . \alpha_1 + c\alpha^2 . \alpha_1^2 + d\alpha^3 . \alpha_1^3 + \ldots + p\alpha^n . \alpha_1^n) = 0.$

Se adesso questa equazione si sottrà dall' equazione (1) avremo finalmente l' equazione

$$(2)' \ldots a + b\alpha . \alpha_1 + c\alpha^2 . \alpha_1^2 + d\alpha^3 . \alpha_1^3 + \ldots + p\alpha^n . \alpha_1^n = 0.$$

Così la risoluzione dell' equazione (2), che ci doveva dare il valore di α_1 si è ridotta alla risoluzione dell' equazione (2)', dalla quale si deve determinare il valore di α_1 medesimo.

§. 10. Ora essendo l' equazione (2)' la medesima (prendendo per incognita $\alpha . \alpha_1$), che l' equaziene (1), per avere ambedne i medesimi coefficienti, è chiaro che $\alpha . \alpha_1$ sarà ancora una radice dell' equazione (1): e se questa radice si indica per α', avremo

$\alpha . \alpha_1 = \alpha'$, e perciò $\alpha_1 = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Dal che si deduce che una radice dell' eqnazione (2) è il quoziente di due radici dell' equazioni (1); Così se le radici di quest' ultima sono $\alpha, \alpha', \alpha''$, ... $\alpha^{(n-1)}$ quelle dell' equazione (2) saranno $\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{\alpha''}{\alpha}, \frac{\alpha'''}{\alpha}, \ldots \frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha}$. Avremo così trovato il valore di α_1 senza la risoluzione dell' equazione (2), deducendolo dalla risoluzione della medesima equazione, da cui si deduceva α.

§. 11. L' equazione (3) del §. 6., che determina α_2 è rapporto a quella (2), che determinata α_1, ciò che questa quì era rapporto all' equazione (1) che determinava α; onde col medesimo ragionamento fatto sopra, si dimostrerà, che se per $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1'''$, ec. rappresentiamo le radici dell' equazione (2), quelle dell' equazione (3), che indichiamo per $\alpha_2, \alpha_2', \alpha_2''$, ec. saranno eguali respettivamente a $\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}, \frac{\alpha_1''}{\alpha_1}, \frac{\alpha_1'''}{\alpha_1}$, ec. Avremo

adunque $\alpha_2 = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \frac{\alpha''}{\alpha} : \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha''}{\alpha'}$ ..

E' facile fino da quì vedere che il medesimo andamento ci porterà ad avere $\alpha_3 = \frac{\alpha'''}{\alpha''}$ essendo α''' un' altra radice dell' equazione (1); di modo che in generale se le radici dell' equazione (1)
$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$ sono rappresentate per $\alpha, \alpha', \alpha''$, $\alpha''', \ldots \alpha^{(n-1)}$ s' avrà $\alpha_1 = \frac{\alpha'}{\alpha}, \alpha_2 = \frac{\alpha''}{\alpha'}, \alpha_3 = \frac{\alpha'''}{\alpha''}, \ldots\ldots$
$\alpha_{n-1} = \frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n-2)}}$.

§. 12. Al §. 5. abbiamo trovato $p' = p\alpha^n$, al §. 6. si è parimente trovato $p'' = p'\alpha_1^{n-1}$, e ponendo mente all' andamento che ha condotto a queste espressioni si vedrà che
$p''' = p''\alpha_2^{n-2}, p'''' = p'''\alpha_3^{n-3}$, ec. ed infine $p^{(n)} = p^{(n-1)}\alpha_{n-1}$.
Da ciò si ricava per mezzo delle successive sostituzioni
$p^{(n)} = p\alpha^n . \alpha_1^{n-1} . \alpha_2^{n-2} \ldots \alpha_{n-1}$, ovvero sostituendo per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ec. i suoi valori, avremo

$$p^{(n)} = p . \alpha^n . \frac{\alpha'^{n-1}}{\alpha^{n-1}} . \frac{\alpha''^{n-2}}{\alpha'^{n-2}} \ldots \frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n-2)}} \text{ ovvero}$$

$$p^{(n)} = \alpha . \alpha' . \alpha'' . \alpha''' \ldots \alpha^{(n-1)} . p .$$

Ma il prodotto di tutte le radici $\alpha, \alpha', \alpha''$, ec. $\alpha^{(n-1)}$ di una equazione (1) è eguale, secondo ciò che si dimostra nell' algebra, alla quantità $\pm \frac{a}{p}$, che è l' ultimo termine dell' equazione (1) essendo il primo α^n; dunque sostituendo invece di questo prodotto, il suo valore in $p^{(n)}$, avremo $p^{(n)} = \pm a$.

§. 13. Se adesso si pongono nella formola del §. 7. i valori di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ec. e di $p^{(n)}$ avremo

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \Sigma \frac{\alpha'''^x}{\alpha''^x} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}}.$$

Il segno + vale per n pari, il − per n impari.

Questa espressione di y_x sarà l' integrale completo della proposta, poichè oltre il soddisfare ad essa contiene le n costanti, che vi introducono gli n segni sommatorj.

Per farne un esempio, si abbia da integrare l' equazione del terzo ordine $6y_x + y_{x+1} - 4y_{x+2} + y_{x+3} = X$; se si paragona questa equazione con l' equazione generale del §. 3., avremo la seguente equazione algebraica da risolvere $6 + \alpha - 4\alpha^2 + \alpha^3 = 0$, le cui radici sono $\alpha = -1$, $\alpha' = 2$, $\alpha'' = 3$: Avremo egualmente $a = 6$, $n = 3$..

L' espressione dell' integrale completo della proposta, sostituendo questi valori nella quì sopra trovata formola generale, e prendendo il segno −, perchè l' ordine dell' equazione da integrarsi è impari, sarà.

$$y_x = -\frac{(-1)^x}{6} \Sigma \frac{2^x}{(-1)^x} \Sigma \frac{3^x}{2^x} \Sigma \frac{X}{3^x}.$$

Supponghiamo $X = 6^x$, ed avremo

$$y_x = -\frac{(-1)^x}{6} \Sigma \frac{2^x}{(-1)^x} \Sigma \frac{3^x}{2^x} \Sigma \frac{6^x}{3^x}.$$

Ora secondo ciò che s' insegna nel calcolo integrale, si ha generalmente

$\Sigma m^x = \frac{m^x}{m-1} + C$, essendo C la costante arbitraria che porta l' integrazione: Dunque eseguendo le successive integrazioni accennate nell' espressione dell' integrale completo, avremo

$$\Sigma \frac{6^x}{3^x} = \Sigma 2^x = 2^x + C; \text{ e perciò}$$

$$\Sigma \frac{3^x}{2^x} \Sigma 2^x = \Sigma \frac{3^x}{2^x}(2^x + C) = \Sigma \left(3^x + \frac{3^x}{2^x} C\right) = \frac{3^x}{2} + \frac{3^x}{2^{x-1}} C + C'.$$

Egualmente

$$\Sigma \frac{2^x}{(-1)^x} \Sigma \frac{3^x}{2^x} \Sigma 2^x = \Sigma \frac{2^x}{(-1)^x} \left(\frac{3^x}{2} + \frac{3^x}{2^{x-1}} C + C' \right) = \Sigma \left(\frac{6^x}{2(-1)^x} + \frac{2 \cdot 3^x}{(-1)^x} C + \frac{2^x}{(-1)^x} C' \right).$$

Per integrare questa ultima espressione ponghiamo α invece di -1, ed avremo da integrare

$\Sigma \left(\frac{6^x}{2\alpha^x} + \frac{2 \cdot 3^x}{\alpha^x} C + \frac{2^x}{\alpha^x} C' \right)$, che sarà

$$= \frac{6^x}{2\alpha^{x-1}(6-\alpha)} + \frac{2 \cdot 3^x}{\alpha^{x-1}(3-\alpha)} C + \frac{2^x}{\alpha^{x-1}(2-\alpha)} C' + C'';$$

dal che si ricava il valore di y_x,

$$y_x = -\frac{\alpha^x}{6} \left(\frac{6^x}{2\alpha^{x-1}(6-\alpha)} + \frac{2 \cdot 3^x}{\alpha^{x-1}(3-\alpha)} C + \frac{2^x}{\alpha^{x-1}(2-\alpha)} C' + C'' \right)$$

$$= -\frac{\alpha}{2(6-\alpha)} 6^{x-1} - 2 \cdot 3^x \cdot \frac{\alpha}{6(3-\alpha)} C - 2^x \cdot \frac{\alpha}{6(2-\alpha)} C' - \alpha^x C'',$$

e riponendo invece di α il suo valore -1, avremo

$$y_x = \frac{6^{x-1}}{14} + \frac{2 \cdot 3^x}{24} \cdot C + \frac{2^x}{18} C' - (-1)^x C'' \text{ ovvero}$$

$$y_x = \frac{6^{x-1}}{14} + C \cdot 3^x + C' \cdot 2^x \mp C''$$

considerando contenute entro le costanti C, C', le quantità numeriche, che formano i coefficienti di 3^x e di 2^x. Il segno $-$ avanti la costante C'' deve prendersi per x pari, ed il $+$ per x impari. Tale sarà l'integrale dell'equazione reso completo dalle tre costanti arbitrarie C, C', C''.

§. 14. Se alcune delle radici delle equazione $a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$ sono eguali, se per esempio sia $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha'''$, avremo l'integrale dell'equazione (A) così espresso

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha^{IIII x}}{\alpha^x} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}}$$

che prende questa forma

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma \frac{\alpha''''^x}{\alpha^x} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}},$$

il quale sarà sempre completo, poichè contenendo sempre n segni sommatorj, questi introducono n costanti arbitrarie.

Nel caso delle radici eguali i metodi fin ora conosciuti danno l'integrale incompleto, e per completarlo conveniva ricorrere ad artifizi estranei all' equazione proposta, l' inesattezza dei quali vedremo in seguito. Così il metodo da noi usato ha il vantaggio di dare sempre gl' integrali completi, qualunque siano le radici dell' equazione algebraica.

Se l' equazione proposta fosse di questa forma

$$y_x - n y_{x+1} + \frac{n.n-1}{2} y_{x+2} - \frac{n.n-1.n-2}{2.3} y_{x+3} + \ldots \pm y_{x+n} = X$$

l' equazione da risolversi sarebbe

$$1 - n\alpha + \frac{n.n-1}{2}\alpha^2 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\alpha^3 \ldots \pm \alpha^n = 0,$$

la quale non è altro che $(\alpha-1)^n = 0$; le radici di questa ultima equazione sono $\alpha = \alpha' = \alpha'' =$ ec. $= 1$. L' integrale adunque sarà così espresso

$y_x = \Sigma\Sigma\Sigma \ldots \Sigma X$ e sarà completo, poichè i segni sommatorj, che devono essere di numero n, portano n costanti arbitrarie. Riflettendo all' equazione differenziale quì proposta, e rammentandoci ciò che si è detto al §. 1., si vede che il primo membro è $\Delta^n y_x$ onde l' equazione da integrarsi diventa $\Delta^n y_x = X$, la quale integrata col metodo delle successive integrazioni ci dà

$$\Delta^{n-1} y_x = \Sigma X,\ \Delta^{n-2} y_x = \Sigma\Sigma X,\ \Delta^{n-3} y_x = \Sigma\Sigma\Sigma X, \text{ ec.}$$

Si perviene così al medesimo risultato che ci ha dato il nostro metodo.

§. 15. Ma per vedere più chiaramente come il nostro integrale contenga sempre un numero n di costanti arbitra-

rie, supponghiamo che siano quattro le radici eguali; e che eseguita l' integrazione della porzione della formola

$$\Sigma\frac{\alpha''''^x}{\alpha^x}\ldots\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}\Sigma\frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}},$$

questa divenga $z_x + A$, essendo A la costante che porta l'ultima integrazione, avremo in questo caso $y_x = \pm\frac{\alpha^x}{a}\Sigma\Sigma\Sigma(Z_x + A)$. Ma $\Sigma Z_x + \Sigma A = Z'_x + Ax + A'$, essendo Z'_x la somma ΣZ_x e A' la nuova costante arbitraria che porta l'integrazione; Così

$$\Sigma\Sigma(Z_x + A) = \Sigma(Z'_x + Ax + A') = Z''_x + \frac{Ax(x-1)}{2} + A'x + A'',$$

e mutando la forma delle costanti, cioè a dire rappresentando per A, A' i coefficienti costanti di x^2 e di x, sarà detta quantità $= Z''_x + Ax^2 + A'x + A''$. essendo $Z''_x = \Sigma Z'_x$. Continuando si vede che avremo

$\Sigma\Sigma\Sigma(Z^x + A) = Z'''_x + Ax^3 + A'x^2 + A''x + A'''$ essendo $Z'''_x = \Sigma Z''_x$ e A, A', A'', A''' costanti arbitrarie:

In questo caso adunque l'integrale completo sarà

$y_x = \pm\frac{\alpha^x}{a}(Z'''_x + Ax^3 + A'x^2 + A''x + A''')$; e considerando $\pm\frac{1}{a}$ contenuto entro le costanti arbitrarie, avremo

$$y_x = \pm\frac{\alpha^x}{a}Z'''_x + Ax^3.\alpha^x + A'x^2.\alpha^x + A''x.\alpha^x + A'''.\alpha^x;$$

e questo sarà completo poichè in Z_x, da cui ne viene per le successive integrazioni Z'''_x, sono contenute $n-4$ costanti arbitrarie, ed in conseguenza l'espressione di y_x ne conterrà un numero n.

Così se si proponesse da integrare questa equazione di terzo ordine, $12y_x - 8y_{x+1} - y_{x+2} + y_{x+3} = 6^x$, l'equazione algebraica da risolversi sarebbe

$\alpha^3 - \alpha^2 - 8\alpha + 12 = 0$, le cui radici sono $\alpha = 2$, $\alpha' = 2$, $\alpha'' = -3$: vi sono perciò due radici eguali $\alpha = \alpha' = 2$; La formola generale

rale del §. 14. ci dà, fatte le debite sostituzioni per y_x questa espressione

$$y_x = -\frac{2^x}{12}\Sigma\Sigma\frac{(-3)^x}{2^x}\Sigma\frac{6^x}{(-3)^x} = -\frac{2^x}{12}\Sigma\Sigma\frac{(-3)^x}{2^x}\Sigma\frac{2^x}{(-1)^x}:$$ la quale

espressione sviluppata secondo le regole d'integrazione delle quantità esponenziali, diverrà

$$y_x = \frac{6^x}{12.4.3} - C(-3)^x + C'x.2^x + C''.2^x. \text{ ovvero}$$

$$y_x = \frac{6^x}{12.4.3} \pm C3^x + C'x.2^x + C''.2^x;$$

il + vale per x pari, e il − per x impari. S'avverta che nel fare l'integrazione dell'espressione di y_x i coefficienti costanti portati dall'integrazione medesima si sono trascurati in quei termini, ove sono le costanti arbitrarie, poichè si possono considerare come contenuti entro queste costanti medesime.

§. 16. Se si fa $X = o$, l'integrale completo dell'equazione

$$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + py_{x+n} = o$$

sarà, avvertendo però che $\Sigma\frac{X}{a^{(n-1)x}}$ in questo caso è $= \Sigma\, o$ $= A$, costante arbitraria, sarà dico

$$y_x = \pm\frac{a^x}{a}\Sigma\frac{a'^x}{a^x}\Sigma\frac{a''^x}{a'^x}\Sigma\ldots\Sigma\frac{a^{(n-1)x}}{a^{(n-2)x}}A,$$

che rimane sempre completo qualunque siano le radici dell'equazione.

Ora facendo le successive integrazioni avremo

$$\Sigma A \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} = A \frac{1}{\frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n-2)}} - 1} \cdot \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} + A'$$

essendo A′ costante arbitraria. Se si muta adesso la forma della costante A, se cioè si considera come contenuto in essa il coefficiente costante

$1 : \left(\frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n-2)}} - 1\right)$, avremo $\Sigma A \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} = A . \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} + A'$;

Così moltiplicando quest' ultima equazione per $\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}}$, che è la quantità immediatamente avanti all' ultimo segno sommatorio, ed integrando avremo

$$\Sigma \frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}} \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} . A = A \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}} + A' \Sigma \frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}} = \ldots\ldots$$

$$= A \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}} + A' . \frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}} + A''.$$

Le quantità costanti che portano l'integrazioni si considerano come contenute entro le costanti arbitrarie A, A′, A″.

Continuando il medesimo andamento si avrà

$$\Sigma \frac{\alpha^{(n-3)^x}}{\alpha^{(n-4)^x}} \Sigma \frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}} \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} . A = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= A . \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-4)^x}} + A' . \frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-4)^x}} + A'' . \frac{\alpha^{(n-3)^x}}{\alpha^{(n-4)^x}} + A''' ;$$ ed.

in fine

$$\Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} . A = A . \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^x} + A' . \frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^x} +$$

$$A''.\frac{\alpha^{(n-3)x}}{\alpha^x} + \ldots + A^{(n-2)}.\frac{\alpha'^x}{\alpha^x} + A^{(n-1)};$$

onde il valore di y_x sarà

$$y_x = \pm\frac{1}{a}(A.\alpha^{(n-1)x} + A'.\alpha^{(n-2)x} + \ldots + A^{(n-2)}.\alpha'^x + A^{(n-1)}.\alpha^x);$$

e considerando $\pm\frac{1}{a}$ come contenuto entro le costanti arbitrarie $A, A', \ldots A^{(n-1)}$ di numero n, avremo

$$y_x = A\alpha^{(n-1)x} + A'\alpha^{(n-2)x} + \ldots + A^{(n-2)}\alpha'^x + A^{(n-1)}\alpha^x;$$

E questa è la forma conosciuta dell' integrale completo dell' equazione (A) del §. 3. nel caso che il secondo membro sia nullo.

Per esempio se l' equazione da integrarsi è $24y_x + 14y_{x+1} - 13y_{x+2} - 2y_{x+3} + y_{x+4} = 0$: Paragonata con l' equazione generale del §. 3., ci dà $X = 0$, e la seguente equazione algebraica da risolversi $24 + 14\alpha - 13\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4 = 0$, le cui radici essendo $\alpha = -1, \alpha' = 2, \alpha'' = -3, \alpha''' = 4$, avremo l' integrale completo così espresso

$$y_x = A.4^x + A'(-3)^x + A''.2^x + A'''(-1)^x, \text{ ovvero}$$
$$y_x = A.4^x \pm A'.3^x + A''.2^x \pm A''';$$

il $+$ vale per x pari, il $-$ per x impari.

§. 17. Tenuto l' integrale sotto la forma del §. antecedente, ha il difetto di divenire incompleto, allorchè alcune delle radici $\alpha, \alpha', \alpha''$, ec. sono eguali. Per vedere come questo succeda si supponga che siano tre le radici eguali, cioè $\alpha'' = \alpha' = \alpha$: Ciò che siamo per dire di queste tre, vale per qualunque altro numero maggiore di radici eguali. In questo caso avremo

$$y_x = A\alpha^{(n-1)^x} + A'\alpha^{(n-2)^x} + \ldots + A^{(n-4)}.\alpha'''^x + A^{(n-3)}.\alpha^x +$$
$$A^{(n-2)}.\alpha^x + A^{(n-1)}.\alpha^x \text{ ovvero}$$

$$y_x = A.\alpha^{(n-1)^x} + A'.\alpha^{(n-2)^x} + \ldots + A^{(n-4)}.\alpha'''^x + (A^{(n-3)} +$$
$$A^{(n-2)} + A^{(n-1)})\alpha^x,$$

e supponendo che le due costanti arbitrarie $A^{(n-2)} + A^{(n-1)}$ siano contenute nella costante parimente arbitraria $A^{(n-3)}$, avremo

$$y_x = A.\alpha^{(n-1)^x} + A'.\alpha^{(n-2)^x} + \ldots + A^{(n-4)}.\alpha'''^x + A^{(n-3)}.\alpha^x:$$

integrale che è incompleto, poichè gli mancano due costanti arbitrarie, essendovene solamente un numero $n-2$.

§. 18. Ecco in questo caso come la nostra formola soddisfà alla ricerca: Quando le tre radici $\alpha, \alpha', \alpha''$ sono eguali si ha

$$y_x = \pm\frac{\alpha^x}{a}\Sigma\Sigma\Sigma\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{\alpha''''^x}{\alpha'''^x}\ldots\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}.A.$$

Ora al §. 16. abbiamo veduto che fatte le successive integrazioni si ha

$$\Sigma\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{\alpha''''^x}{\alpha'''^x}\ldots\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}.A = \ldots$$

$$= A.\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^x} + A'.\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^x} + \ldots + A^{(n-4)}.\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x} + A^{(n-3)},$$

onde secondo il metodo usato al §. 15. avremo

$$\Sigma\Sigma\Sigma\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{\alpha''''^x}{\alpha'''^x}\ldots\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}.A = A.\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^x} + A'.\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^x} +$$

$$A''.\frac{\alpha^{(n-3)^x}}{\alpha^x}+\ldots+A^{(n-4)}.\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x}+A^{(n-3)}.x^2+A^{(n-2)}x+ A^{(n-1)}.$$

L'espressione adunque di y_x, considerando $\pm\frac{r}{a}$ contenuto nelle costanti, arbitrarie, sarà la seguente

$$y_x=A.\alpha^{(n-1)^x}+A'.\alpha^{(n-2)^x}+\ldots+A^{(n-4)}.\alpha'''^x+\ldots\ldots A^{(n-3)}.x^2\alpha^x+A^{(n-2)}.x\alpha^x+A^{(n-1)}.\alpha^x.$$

Questa rappresenterà sempre l' integrale completo, poichè contiene n costanti arbitrarie.

§. 19. Si vede adunque che in vece dei tre termini $A^{(n-3)}.\alpha''^x+A^{(n-2)}.\alpha'^x+A^{(n-1)}.\alpha^x$, i quali si riducono ad un solo quando le radici α'',α',α sono eguali, l' integrale contiene questi tre

$$A^{(n-3)}x^2\alpha^x+A^{(n-2)}x\alpha^x+A^{(n-1)}\alpha^x:$$

Generalmente se le radici eguali fossero di numero m l' integrale conterrebbe i termini

$$A^{(n-m)}x^{m-1}.\alpha^x+A^{(n-m+1)}x^{m-2}.\alpha^x+\ldots+A^{(n-2)}x.\alpha^x+ A^{(n-1)}\alpha^x$$ in vece dei termini

$$A^{(n-m)}.\alpha^{(m-1)^x}+A^{(n-m+1)}.\alpha^{(m-2)^x}+\ldots+A^{(n-2)}.\alpha'^x+ A^{(n-1)}.\alpha^x,$$

i quali si riducono ad un solo, quando le radici $\alpha^{(m-1)}$, $\alpha^{(m-2)}$, . . . α, sono eguali.

Se nel medesimo tempo che si hanno m radici eguali ad α ve ne fossero un numero p eguali ad un altra radice,

un numero q eguali ad un altra ec., allora in vece dei termini, che avrebbe introdotti ciascun numero di radici eguali, se quelle non fossero state tali, si ricava dal nostro metodo che bisogna sostituirvi altrettanti termini, composti di costanti diverse moltiplicate per una di quelle radici eguali, e poi ciascuno per una di queste potenze dell' $x, x^{p-1}, x^{p-2}, \ldots x, x^0$ per il numero p di radici eguali; e di queste potenze $x^{q-1}, x^{q-2}, \ldots x, x^0$ per quelle di numero q, e così di seguito.

Se per esempio l'equazione da integrarsi fosse $24y_x - 44y_{x+1} + 30y_{x+2} - 9y_{x+3} + y_{x+4} = 0$; l'equazione algebraica da risolversi è $\alpha^4 - 9\alpha^3 + 30\alpha^2 - 44\alpha + 24 = 0$, le cui radici sono $\alpha = 2$, $\alpha' = 2$, $\alpha'' = 2$, $\alpha''' = 3$; questa ha dunque tre radici eguali, perciò il di lei integrale sarà

$$y_x = A \,.\, 2^x + A'x \,.\, 2^x + A''x^2 \,.\, 2^x + A''' \,.\, 3^x,$$

il quale sarà completo per le quattro costanti arbitrarie A, A', A'', A'''.

§. 20. Noi abbiamo al §. 17. avvertito che la formola dell'integrale completo data fin quì dai Geometri, aveva il difetto di rendersi incompleta per il caso delle radici eguali; e quantunque la nostra sia affatto esente da questo, pure noi ci tratterremo ad esporne il metodo, col quale vi hanno fin ora rimediato i Geometri, mostrandone l'inesattezza; ed esporremo in seguito i veri principj, dai quali si può ricavare il metodo per ricompletare gl'integrali, che per causa delle radici eguali mancano di alcune costanti arbitrarie.

Non ci tratterrebbamo a sviluppare i principj di questo nuovo metodo, non avendone bisogno le nostre formole, se non ne dovessemo fare uso per l'equazioni lineari a differenze parziali, delle quali parleremo negl'ultimi due Capitoli di questo trattato.

§. 21. Se le radici eguali sono due, se cioè $\alpha = \alpha'$, la formola del §. 17. diviene

$$y_x = A.\alpha^{(n-1)x} + A'.\alpha^{(n-2)x} + \ldots + A^{(n-3)}.\alpha'^x + A^{(n-2)}.\alpha^x,$$

alla quale manca una costante; essa perciò e un integrale particolare della proposta.

Per ricompletarlo, D'Alambert il primo, e tutti gl' altri Geometri dopo lui, suppongono che le quantità eguali α', α differiscano fra loro di una quantità piccolissima ω, di modo che sia $\alpha' = \alpha + \omega$: Dopo questa supposizione avremo

$$\alpha'^x = (\alpha+\omega)^x = \alpha^x + x\alpha^{x-1}.\omega + \frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\omega^2 + \text{ec.};$$

Così gl' ultimi due termini $A^{(n-2)}.\alpha'^x + A^{(n-1)}.\alpha^x$, i quali si erano ridotti ad un solo per l'eguaglianza delle due radici α, α', saranno in conseguenza $A^{(n-2)}(\alpha+\omega)^x + A^{(n-1)}\alpha^x$, ovvero

$$A^{(n-2)}(\alpha^x + x\alpha^{x-1}.\omega + \frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\omega^2 + \text{ec.}) + A^{(n-1)}.\alpha^x.$$

Se ora si trascurano gl' infinitamente piccoli di secondo ordine, avremo per quei due ultimi termini

$A^{(n-2)}(\alpha^x + x\alpha^{x-1}.\omega) + A^{(n-1)}.\alpha^x$, che si riducono a

$$(A^{(n-2)} + A^{(n-1)})\alpha^x + A^{(n-2)}.\frac{\omega}{\alpha}\alpha^x.x.$$

Supponendo adunque la somma delle due costanti arbitrarie $A^{(n-2)} + A^{(n-1)}$ rappresentata da una sola $A^{(n-1)}$, e la quantità costante $\frac{\omega}{\alpha}$ contenuta in $A^{(n-2)}$, cioè mutando la forma delle costanti avremo $A^{(n-2)}.x.\alpha^x + A^{(n-1)}.\alpha^x$;

Così questi due termini non potendosi ridurre ad uno solo, l'integrale rimarrà completo. Valendo il medesimo ragionamento per qualunque altra coppia di radici eguali, ne segue, che se si abbiano quante si vogliono coppie di radici

eguali, come $\alpha^{(m)}=\alpha^{(m-1)}$ ec., i due termini, i quali contengono queste radici, e che si ridurrebbero ad uno solo, dovranno essere lasciati nell' integrale moltiplicandone uno di essi per x. Ciò è conforme a quello che si è detto al §. 19.

§. 22. Se le radici eguali sono tre, cioè $\alpha, \alpha', \alpha''$, supponendo come sopra che le quantità α', α'' differiscano infinitamente poco dalla quantità α; che si abbia cioè $\alpha'=\alpha+\omega, \alpha''=\alpha+\xi$, essendo ω, ξ quantità piccolissime, avremo in vece degl' ultimi tre termini dell' integrale

$$A^{(n-3)}.\alpha''^{x}+A^{(n-2)}.\alpha'^{x}+A^{(n-1)}.\alpha^{x}$$

i tre seguenti

$$A^{(n-3)}(\alpha+\xi)^{x}+A^{(n-2)}(\alpha+\omega)^{x}+A^{(n-1)}\alpha^{x};$$

ovvero sviluppando le potenze dei binomj, questi tre

$$A^{(n-3)}\left(\alpha^{x}+x\alpha^{x-1}.\xi+\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\xi^{2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\alpha^{x-3}\times\right.$$
$$\left.\xi^{3}+\text{ec.}\right)+A^{(n-2)}\left(\alpha^{x}+x\alpha^{x-1}.\omega+\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\omega^{2}+\right.$$
$$\left.\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\alpha^{x-3}.\omega^{3}+\text{ec.}\right)+A^{(n-1)}.\alpha^{x},$$

e trascurando gl' infinitamente piccoli del terzo ordine avremo

$$A^{(n-3)}\left(\alpha^{x}+x\alpha^{x-1}.\xi+\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\xi^{2}\right)+A^{(n-2)}\left(\alpha^{x}+x\alpha^{x-1}.\omega+\right.$$
$$\left.\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\omega^{2}\right)+A^{(n-1)}\alpha^{x}.$$ i quali si riducono a

$$\left(A^{(n-3)}+A^{(n-2)}+A^{(n-1)}\right)\alpha^{x}+\left(A^{(n-3)}\left(\frac{\xi}{\alpha}-\frac{\xi^{2}}{2\alpha^{2}}\right)+\ldots\ldots,\right.$$
$$\left.A^{(n-2)}\left(\frac{\omega}{\alpha}-\frac{\omega^{2}}{\alpha^{2}}\right)\right)x.\alpha^{x}+\left(A^{(n-3)}.\frac{\xi^{2}}{2\alpha^{2}}+A^{(n-2)}.\frac{\omega^{2}}{2\alpha^{2}}\right)x^{2}.\alpha^{x};$$

e cangiando la forma delle costanti cioè rappresentando per una

una costante arbitraria $A^{(n-1)}$ il coefficiente di α^x, per $A^{(n-2)}$ quello di $x.\alpha^x$, per $A^{(n-3)}$ quello di $x^2.\alpha^x$, avremo questi tre termini

$$A^{(n-3)} x^2.\alpha^x + A^{(n-2)}.x\alpha^x + A^{(n-1)}\alpha^x;$$

Ora questi tre termini non potendo riunirsi in un solo, e portando tre costanti arbitrarie diverse, l'integrale si conserverà perciò completo.

§. 23. Col medesimo metodo si trova, che se le radici eguali sono quattro, se $\alpha=\alpha'=\alpha''=\alpha'''$, facendo $\alpha'=\alpha+\omega, \alpha''=\alpha+\xi, \alpha'''=\alpha+\theta$, e trascurando gl' infinitamente piccoli del terzo ordine nello sviluppo dei binomj $(\alpha+\omega)^x$, $(\alpha+\xi)^x$, $(\alpha+\theta)^x$, si ha in vece dei quattro termini

$$A^{(n-4)}\alpha'''^x + A^{(n-3)}\alpha''^x + A^{(n-2)}\alpha'^x + A^{(n-1)}\alpha^x,$$

i quali si riducono ad uno solo, i seguenti

$$A^{(n-4)}x^3.\alpha^x + A^{(n-3)}x^2.\alpha^x + A^{(n-2)}x.\alpha^x + A^{(n-1)}\alpha^x,$$

e perciò l' integrale rimarrà completo.

In generale se le radici eguali sono di numero m in vece dei termini

$$A^{(n-m)}.\alpha^{(m-1)x} + A^{(n-m+1)}.\alpha^{(m-2)x} + \ldots + A^{(n-2)}\alpha'^x + A^{(n-1)}\alpha^x,$$

che si riducono ad un solo, si porranno i termini

$$A^{(n-m)}x^{m-1}.\alpha^x + A^{(n-m+1)}x^{m-2}.\alpha^x + \ldots + A^{(n-2)}x.\alpha'^x + A^{(n-1)}.\alpha^x.$$

Risulta da questo metodo la medesima conseguenza, tirata al §. 19., per il caso, nel quale oltre le m radici eguali ad α, se ne avesse un numero p eguali ad un altra, un numero q eguali ancora fra loro, e così di seguito.

§. 24. Quantunque questo metodo per ridurne ad esse-

re completi gl'integrali, che per il caso delle radici eguali avevano cessato di esserlo, conduca ai medesimi risultati, i quali abbiamo al §. 19. direttamente dedotti dal calcolo integrale, pure non mi sembra che possa soddisfare i Geometri per l'inesattezza dei suoi principj e del suo sviluppo.

Primieramente il supporre che le radici eguali differiscano fra loro di quantità piccolissime, non può essere ammesso in rigore di analisi, e si possono quì mettere in campo tutte quelle difficoltà, che erano mosse contro il calcolo infinitesimale, quando non se ne deducevano i suoi fondamenti dalla Teoria dei limiti.

In secondo luogo ponendo mente allo sviluppo del metodo, si vede che quando le radici eguali sono due, si sono trascurati gl' infinitamente piccoli del secondo ordine, e dei suoi più alti, quando sono tre, quegli del terzo, quando le radici eguali sono quattro, quegli del quarto, e così di seguito: Ora tutto questo andamento è precario, poichè non vi è nessuna ragione dipendente dalla eguaglianza delle radici, per cui dobbiamo determinarci a trascurare piuttosto gl' infinitamente piccoli di un ordine e dei suoi successivi, che di un altro e dei suoi più alti. In fatti per qual ragione quando le radici eguali sono due di numero, non si ammettono gl' infinitamente piccoli di secondo ordine, i quali hanno il suo luogo per il caso di tre radici eguali?

Dopo queste riflessioni e molte altre che io tralascio, ne ho concluso l'inesattezza del metodo del Sig. d'Alambert; e mi sono in conseguenza applicato a ricercare un metodo per ricompletare gl' integrali dipendente dalla natura della questione, ed avendolo ritrovato, lo espongo quì appresso.

§. 25. Riprendiamo l'equazione lineare del §. 3., avendovi supposto $X=0$,

$$(A)\, ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + py_{x+n} = 0.$$

Supponghiamo che y_x sia di questa forma $y_x = Aa^x$, es-

sendo A, α due costanti. Se si sostituiscono i valori di y_x, y_{x+1} ec. nell' equazione (A), avremo, dopo avere diviso per A, per determinare la costante α, questa equazione

$$(1) \ldots a\alpha^x + b\alpha^{x+1} + c\alpha^{x+2} + \ldots + p\alpha^{x+n} = 0,$$

la quale divisa per α^x diviene una equazione algebraica del grado n, $a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$.

Ora avendo questa equazione n radici, se queste si rappresentano per $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n-1)}$, moltiplicando le potenze x di queste radici per delle costanti indeterminate diverse, avremo un numero n di valori per y_x, ciascun dei quali soddisfarà alla proposta (A), e contenendo una costante arbitraria, ne sarà perciò un integrale particolare. Questi valori dell' y_x, o questi integrali particolari della proposta saranno $y_x = A.\alpha^x, A'.\alpha'^x, A''.\alpha''^x, \ldots A^{(n-1)}.\alpha^{(n-1)x}$; le quantità $A, A', A'', \ldots A^{(n-1)}$ sono costanti arbitrarie.

Ora essendo l' equazione (A) lineare è chiaro che ancora la somma di tutti questi integrali particolari soddisfarà ad essa, e che perciò si potrà prendere per y_x l' espressione

$$A\alpha^x + A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots + A^{(n-1)}\alpha^{(n-1)x},$$

la quale sarà l' integrale completo, perchè contiene un numero n di costanti arbitrarie: Questa è la formola che abbiamo ancora trovata al §. 16.

§. 26. L' integrale completo adunque dell' equazione (A) è l' aggregato di un numero n di suoi integrali particolari.

Supponghiamo che due radici α, α' siano eguali, allora come abbiamo veduto al §. 17. due degl' integrali particolari si riducono ad un solo, e l' espressione superiore dell' y_x diviene

$$y_x = (A + A')\alpha'^x + A''.\alpha''^x + \ldots + A^{(n-1)}.\alpha^{(n-1)x},$$

ovvero, facendo $A + A' =$ ad una sola costante A',

$$y_x = A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots + A^{(n-1)}.\alpha^{(n-1)x},$$

e questa espressione non sarà la somma che di $n-1$ integrali particolari; le mancherà in conseguenza una costante arbitraria, e l'integrale che essa rappresenta sarà incompleto.

Ciò premesso osserviamo che l'equazione (1) dalla risoluzione della quale dipende l'integrazione dell'equazione (A), si può anche porre sotto questa forma.

$$(1)' \ldots \alpha^{x+n} + a'\alpha^{x+n-1} + b'\alpha^{x+n-2} + \ldots + p'\alpha^x = 0,$$

essendo $a' = \frac{q}{p}$, $b' = \frac{r}{p}$, ... $p' = \frac{s}{p}$; e da questa equazione (1)' dipenderà l'integrazione dell'equazione (A).

Se adesso si moltiplica ciascun termine dell'equazione (1)' per l'esponente dell'incognita α, otterremo l'equazione

$$(1)'' \ldots (x+n)\alpha^{x+n} + (x+n-1)a'\alpha^{x+n-1} + \ldots \ldots$$
$$(x+n-2)b'\alpha^{x+n-2} + \ldots + xp'\alpha^x = 0.$$

E' noto per la teoria dell'equazioni (*) che le radici dell'equazione (1)' sono i limiti delle radici dell'equazione (1)'': se dunque l'equazione (1)' ha due radici eguali, $\alpha = m$, $\alpha' = m$, l'equazione (1)'' deve avere una radice contenuta fra le radici m ed m, cioè una radice $= m$; e generalmente se l'equazione (1)' ha un numero l di radici $= m$, l'equazione (1)'' avrà un numero $l-1$ di radici parimente $= m$: Una adunque di queste radici eguali soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni (1)', (1)''.

§. 27. Se adunque per y_x si prende un tal valore, che sostituito nella proposta (A) la trasformi nell'equazione (1)'', la quale quando le radici sono eguali è soddisfatta nel tempo stesso che l'equazione (1)', questo valore sarà un altro integrale particolare, il quale aggiunto all'espressione incompleta, la renderà completa.

(*) Elem. d'Algebra di Mac-Laurin.

Ora un poco di riflessione serve per accorgersi, che questo valore di y_x è $y_x = A(x+n)\alpha'^x$, essendo α' una delle due radici eguali; poichè sostituendo invece di y_x questo valore, l'equazione (A) diviene l'equazione $(1)''$, la quale ha luogo, in questo caso, nel medesimo tempo che l'equazione $(1)'$: Dunque $y_x = A(x+n)\alpha'^x$ sarà un altro integrale particolare dell' equazione (A), il quale aggiunto all' espressione incompleta, la ridurrà alla seguente

$$y_x = A(x+n)\alpha'^x + A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots + A^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x},$$

la quale mutando le costanti prende questa forma

$$y_x = Ax\alpha'^x + A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots + A^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x};$$

E questa contenendo n costanti arbitrarie, e perciò l' integrale completo.

Avremmo potuto trovare anche a priori il nuovo valore di y_x: Infatti supponendo che questo sia $y_x = A.\alpha^x\varphi(x)$, indicando per $\varphi(x)$ una funzione di x da determinarsi, e sostituendo i valori di y_{x+1}, y_{x+2}, ec. nella proposta si giunge dopo aver tutto diviso per Ap, si giunge dico all' equazione

$$\alpha^{x+n}\varphi(x+n) + a'\alpha^{x+n-1}\varphi(x+n-1) + \ldots + p'\alpha^x\varphi(x) = 0.$$

Ora essendo α una delle radici eguali, l'equazione quì trovata sarà soddisfatta e nel caso di $\varphi(x) = 1$, e in quello di $\varphi(x+n) = x+n$; poichè nel primo caso essa diviene l'equazione $(1)'$ e nel secondo l'equazione $(1)''$; dunque y_x ha i due valori $A\alpha^x$, $A(x+n)\alpha^x$; e questo secondo è il nuovo integrale particolare dato dalle radici eguali.

Egualmente si proverà che se si ha un altro paio qualunque di radici eguali $\alpha''' = \alpha''''$, servirebbe invece dei due termini $A'''\alpha'''^x + A''''\alpha''''^x$, i quali si riducono ad un solo,

mettere i segnenti $A''' x \alpha''''^x + A'''' \alpha''''^x$, che sono due termini distinti.

§. 28. Se nell' equazione $(1)''$ si moltiplica ciascun termine per il respettivo esponente di α, avremo l'equazione

$$(1)''' \ldots (x+n)^2 \alpha^{x+n} + (x+n-1)^2 a' \alpha^{x+n-1} + \ldots + x^2 p' \alpha^x = 0,$$

e le radici dell' equazione $(1)''$ saranno i limiti delle radici dell' equazione $(1)'''$; di modo che se l'equazione $(1)'$ avrà l radici eguali ad m, l'equazione $(1)''$ avrà $l-1$ radici eguali ad m; e l'equazione $(1)'''$ ne avrà un numero $l-2$ parimente eguali ad m: Così una di queste radici eguali sodisfarà nel medesimo tempo alle tre equazioni $(1)'$, $(1)''$, $(1)'''$.

§. 29. Se si hanno per tanto tre radici eguali $\alpha = \alpha' = \alpha''$, i tre integrali particolari $A\alpha^x$, $A'\alpha'^x$, $A''\alpha''^x$ si riducono ad un solo, e mancheranno perciò all' espressione di y_x due costanti arbitrarie.

Se adunque si prenderanno in questo caso due tali valori di y_x, che sostituiti successivamente nella proposta la trasformino nelle due equazioni $(1)''$, $(1)'''$, questi due valori dell' y_x saranno due nuovi integrali particolari, i quali aggiunti all' espressione incompleta di y_x la ricompleteranno. E' facile vedere che tali valori particolari sono

$$y_x = A(x+n)\alpha''^x, \quad y_x = A'(x+n)^2 \alpha''^x,$$

essendo α'' una delle tre radici eguali; Infatti sostituendo nella proposta $A(x+n)\alpha''^x$ per y_x essa diviene l'equazione $(1)''$, o sostituendovi $A'(x+n)^2 \alpha''^x$ per y_x, si trasforma nell' equazione $(1)'''$; e queste due equazioni $(1)''$, $(1)'''$ hanno luogo nel medesimo tempo che l' equazione $(1)'$;

Aggiungendo all' espressione incompleta di y_x i due integrali particolari trovati, avremo

$$y_x = A(x+n)\alpha''^x + A'(x+n)^2 \alpha''^x + A''.\alpha''^x + \ldots + A^{(n-1)}.\alpha^{(n-1)x};$$

e cangiando la forma delle costanti si avrà

$$y_x = Ax^2 . \alpha''^x + A'x . \alpha''^x + A''\alpha''^x + \ldots + A^{(n-1)} . \alpha^{(n-1)x} :$$

Espressione che conterrà un numero n di costanti arbitrarie, e sarà perciò l' integrale completo della proposta.

Così sempre che avremo tre radici eguali qualunque per esempio $\alpha''', \alpha'''', \alpha^{v}$ invece dei termini $A'''\alpha'''^x + A''''\alpha''''^x + A^{v}\alpha^{vx}$, che si riducono ad uno solo, dovremo mettere i tre termini
$A'''x^2 . \alpha^{vx} + A'''' x . \alpha^{vx} + A^{v} . \alpha^{vx}$, che sono sempre distinti.

§. 30. Col medesimo ragionamento si dimostrerebbe che se si ha un numero l di radici eguali $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots \alpha^{(l-1)}$ in vece degl' l termini

$$A\alpha^x + A'\alpha'^x + \ldots + A^{(l-1)}\alpha^{(l-1)x},$$

che si riducono ad un solo, converrà mettere gl' l termini seguenti

$$A . x^{l-1} . \alpha^{(l-1)x} + A' . x^{l-2} . \alpha^{(l-1)x} + \ldots + A^{(l-2)} . x . \alpha^{(l-1)x} + A^{(l-1)} . \alpha^{(l-1)x},$$

e allora l' integrale si conserverà completo: si vede come dovrebbe farsi se oltre il numero l di radici eguali fra loro, vi fosse anche un altro numero p di radici eguali fra loro, ma diverse dalle prime; si hanno i medesimi risultati che al §. 19.

§. 31. Risulta adunque, come dalla natura stessa delle equazioni si attinga il metodo per ricompletare quegl' integrali, che dalla risoluzione di tali equazioni dipendendo, erano ridotti incompleti per la presenza delle radici eguali; di modo che se quelle equazioni a radici eguali portano seco un difetto, contengono ancora in se stesse i principj per correggerlo; In questa guisa per ricompletare gl' integrali ci serviamo di un metodo inerente alla natura della ricerca.

§. 32. Riprendiamo l' espressione dell' integrale completo data al §. 13.

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}}$$

il + valendo per n pari, e il − per n impari. E' facile da questa dedurre la formola stata data dai Geometri per l' integrazione delle equazioni lineari a coefficienti costanti, la quale è (*)

$$y_x = \frac{\alpha^x (A + \Sigma \frac{X}{\alpha^x})}{m} + \frac{\alpha'^x (A' + \Sigma \frac{X}{\alpha'^x})}{m'} + \frac{\alpha''^x (A'' + \Sigma \frac{X}{\alpha''^x})}{m''} + \ldots + \frac{\alpha^{(n-1)^x} (A^{(n-1)} + \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}})}{m^{(n-1)}}.$$

In questa formola A, A', ec. sono le costanti arbitrarie; α, α', ec. rappresentano il medesimo che per noi, vale a dire le radici dell' equazione (1) del §. 5; e m, m', m'', ec. sono quantità costanti, i valori delle quali sono

$$m = \alpha b + 2\alpha^2 c + 3\alpha^3 d + \ldots + n\alpha^n p$$
$$m' = \alpha' b + 2\alpha'^2 c + 3\alpha'^3 d + \ldots + n\alpha'^n p$$
ec. ec.
$$m^{(n-1)} = \alpha^{(n-1)} b + 2\alpha^{(n-1)^2} c + \ldots + n\alpha^{(n-1)^n} p.$$

Il metodo per il quale si deduce quella formola dalla nostra lo applicheremo ad una equazione del secondo ordine per maggior semplicità; giacchè osservandone l'andamento, si vedrà come potrebbe generalizzarsi per qualunque ordine.

§. 33. Se dunque l' equazione da integrarsi è $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} = X$, l' equazione da risolversi sarà

$a +$

(*) Fra gl' altri si veda il P. Fontana Opus. di Pavia.

$a+bx+cx^2=0$: Siano le radici di questa equazione α,α', il nostro integrale sarà

$y_x=\frac{\alpha^x}{a}\Sigma\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{X}{\alpha'^x}$, e quello dato dall' altra formola

$$y_x=\frac{\alpha^x(A+\Sigma\frac{X}{\alpha^x})}{\alpha b+2\alpha^2c}+\frac{\alpha'^x(A'+\Sigma\frac{X}{\alpha'^x})}{\alpha'b+2\alpha'^2c}.$$

Ora secondo le regole dell' integrazione per parti, per le quantità a differenze finite, se z,u, rappresentano due funzioni variabili si ha

$$\Sigma(z.u)=z.\Sigma u-\Sigma(\Sigma u.\Delta z+u\Delta z);$$

dunque facendo $u=\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}, z=\Sigma\frac{X}{\alpha'^x}$, avremo dopo aver ridotto

$$\Sigma\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{X}{\alpha'^x}=\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha}.\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{X}{\alpha'^x}-\Sigma(\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha}.\frac{X}{\alpha^x}+\frac{X}{\alpha^x})=\ldots\ldots$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha}.\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}.\Sigma\frac{X}{\alpha'^x}-\frac{\alpha'}{\alpha'-\alpha}\Sigma\frac{X}{\alpha^x};\text{ onde}$$

$$y_x=\frac{1}{a}.\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha}.\alpha'^x\Sigma\frac{X}{\alpha'^x}+\frac{1}{a}.\frac{\alpha'.\alpha^x}{\alpha-\alpha'}.\Sigma\frac{X}{\alpha^x};$$ e aggiungendovi le

costanti che portano l'integrazioni, avremo

$$y_x=\frac{\alpha'^x(A'+\Sigma\frac{X}{\alpha'^x})}{a(\frac{\alpha'}{\alpha}-1)}+\frac{\alpha^x(A+\Sigma\frac{X}{\alpha^x})}{a(\frac{\alpha}{\alpha'}-1)};$$

Ora in una equazione di secondo grado l' ultimo termine col suo segno (allorchè il coefficiente del quadrato dell' incognita è l' unità.) è eguale al prodotto delle due radici, e il coefficiente del secondo col segno mutato è la somma delle radici medesime; dunque $\frac{a}{c}=\alpha\alpha'$, e perciò $a=\alpha\alpha'c$, e

$\alpha + \alpha' = -\frac{b}{c}$; onde $a\left(\frac{\alpha}{\alpha'} - 1\right) = \alpha^2 c - \alpha\alpha' c = \alpha^2 c + \left(\frac{b}{c} + \alpha\right)\alpha c = \alpha b + 2\alpha^2 c$, come pure $a\left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 1\right) = \alpha'^2 c - \alpha\alpha' c = \alpha'^2 c + \left(\frac{b}{c} + \alpha'\right)\alpha' c = \alpha' b + 2\alpha'^2 c$. Il valore adunque di y_x diverrà

$$y_x = \frac{\alpha'^x \left(A' + \Sigma \frac{X}{\alpha'^x}\right)}{\alpha' b + 2\alpha'^2 c} + \frac{\alpha^x \left(A + \Sigma \frac{X}{\alpha^x}\right)}{\alpha b + 2\alpha^2 c},$$ che è l' integrale delle

equazioni di secondo ordine, dato dalla formola fin ora adoprata dai Geometri per l' equazioni lineari. Si terrebbe il medesimo metodo, qualuuque fosse l' ordine dell' equazione.

Gioverà quì osservare che la formola, che abbiamo riportata al §. 32. ha il considerabile difetto di dare l' integrale incompleto, quando alcune delle radici sono eguali. Noi non ci tratterremo quì a mostrare come ancora in questo caso dalla natura stessa delle equazioni a radici eguali si ricavi il metodo di rendere nuovamente completa la formola, potendo ciò dedursi dal metodo sviluppato ai §. 25. e segg., combinato col metodo che hanno i Geometri immaginato per giungere alla lor formola; E poi nel caso delle radici eguali, sostituite queste nella nostra formola e integrata per parti, se ne avrebbe l' espressione completa per questo caso. Si veda ancora il §. 15.

§. 34. Passiamo adesso ad applicare il nostro metodo all' equazioni lineari a coefficienti variabili. Sia l' equazione proposta

$$(A) \ldots a_x . y_x + b_x . y_{x+1} + c_x . y_{x+2} + \ldots + p_x . y_{x+n} = X,$$

nella quale a_x, b_x, ec. p_x sono funzioni della variabile x.

Supponghiamo che y_x abbia questa forma $\alpha_x \Sigma z_x$, essendo α_x, z_x due funzioni dell' x da determinarsi.

Se nella proposta vi si fà

$y_x = \alpha_x \Sigma z_x, y_{x+1} = \alpha_{x+1}(\Sigma z_x + z_x)$, $y_{x+2} = \alpha_{x+2}(\Sigma z_x + z_x + z_{x+1})$, ec. s' avrà questa equazione

$$a_x . \alpha_x \Sigma z_x + b_x . \alpha_{x+1} (\Sigma z_x + z_x) + c_x . \alpha_{x+2} (\Sigma z_x + z_x + z_{x+1}) + \text{ec.} = X,$$

la quale ordinata secondo le funzioni di z_x sarà

$$\left.\begin{array}{r}(a_x.\alpha_x + b_x.\alpha_{x+1} + c_x.\alpha_{x+2} + \ldots + p_x.\alpha_{x+n})\Sigma z_x \\ +(b_x.\alpha_{x+1} + c_x.\alpha_{x+2} + \ldots + p_x.\alpha_{x+n}) z_x \\ +(c_x.\alpha_{x+2} + \ldots + p_x.\alpha_{x+n}) z_{x+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ +p_x.\alpha_{x+n}) z_{x+n-1}\end{array}\right\} = X.$$

Ora se si fa il coefficiente del primo termine eguale a zero avremo per determinare α_x l'equazione

$$(1) \ldots a_x.\alpha_x + b_x.\alpha_{x+1} + c_x.\alpha_{x+2} + \ldots + p_x.\alpha_{x+n} = 0$$

e per determinare z_x, avremo una equazione di questa forma

$$(B) \ldots b'_x.z_x + c'_x.z_{x+1} + \ldots + p'_x.z_{x+n-1} = X,$$

nella quale

$$b'_x = b_x.\alpha_{x+1} + c_x.\alpha_{x+2} + \ldots + p_x.\alpha_{x+n}$$
$$c'_x = c_x.\alpha_{x+2} + \ldots + p_x.\alpha_{x+n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p'_x = p_x.\alpha_{x+n}$$

L'equazione (1) non è altro che la proposta fatto in essa $X=0$; e l'equazione (B) è una equazione lineare a coefficienti variabili dell'ordine $n-1$; Così l'integrazione della proposta dipende dall'integrazione di due equazioni, una che è essa medesima quando X è nullo, l'altra che è una equazione di un ordine $n-1$, inferiore cioè di una unità all'ordine della proposta.

Così facendo $z_x=\alpha'_x\Sigma z'_x$ l'integrazione dell'equazione (B) si farà dipendere dall'integrazione di essa medesima e di una equazione dell'ordine $n-2$, inferiore di due unità dell'equazione (A).

Egualmente facendo $z'_x=\alpha''_x\Sigma z''_x$ e continuando il medesimo andamento, che noi abbiamo tenuto per le equazioni a coefficienti costanti, si vede che arriveremo ad una equazione finale, la quale ci darà il valore di $z_x^{(n-1)}$ senza fare alcuna integrazione; la forma dell'integrale completo sarà allora

$y_x=\alpha_x\Sigma\alpha'_x\Sigma\alpha''_x\ \ldots\ \Sigma\alpha_x^{(n-1)}\Sigma z_x^{(n-1)}$: onde il ritrovare l'integrale completo della proposta (A) (dico completo, poichè contenendo n segni sommatori questi portano n costanti arbitrarie) dipende dalla integrazione di queste equazioni, di numero n

$$(1)\ \ldots a_x.\alpha_x+b_x.\alpha_{x+1}+c_x.\alpha_{x+2}+\ldots\ldots+p_x.\alpha_{x+n}=0$$
$$(2)\ \ldots\ldots\ b'_x.\alpha'_x+c'_x.\alpha'_{x+1}+\ldots+p'_x.\alpha'_{x+n-1}=0$$
$$(3)\ \ldots\ldots\ldots\ c''.\alpha''_x+\ldots+p''_x.\alpha''_{x+n-2}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n)\ \ldots\ldots\ q_x^{(n-1)}.\alpha_x^{(n-1)}+p_x^{(n-1)}.\alpha_{x+1}^{(n-1)}=0$$

la prima è dell'ordine n, la seconda dell'ordine $n-1$, la terza dell'ordine $n-2$, ed infine l'ultima è del primo ordine.

§. 35. Ora è facile dimostrare che trovati n integrali particolari dell' equazione (1) si hanno sul campo e senza alcuna operazione che dipenda dalle integrazioni delle equazioni (2), (3), ec., gl' integrali particolari di quest' altre equazioni; infatti se all' equazione (2), dopo avervi sostituiti i valori dei coefficienti, vi si aggiunge l' equazione (1) moltiplicata per $\Sigma \alpha'_x$, avremo l' equazione (2)' seguente

$$(2)' \left.\begin{array}{r} (a_x . \alpha_x + b_x . \alpha_{x+1} + \ldots\ldots\ldots + p_x . \alpha_{x+n}) \Sigma \alpha'_x \\ + (b_x . \alpha_{x+1} + \ldots\ldots\ldots + p_x . \alpha_{x+n}) \alpha'_x \\ + (c_x . \alpha_{x+2} + \ldots + p_x . \alpha_{x+n}) \alpha'_{x+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + p_x . \alpha_{x+n} . \alpha'_{x+n-1} \end{array}\right\} = 0$$

la quale evidentemente si può mettere sotto questa forma

$$(2)' \ldots a_x . \alpha_x \Sigma \alpha'_x + b_x . \alpha_{x+1} . \Sigma \alpha'_{x+1} + c_x . \alpha_{x+2} . \Sigma \alpha'_{x+2} + \ldots + p_x . \alpha_{x+n} . \Sigma \alpha'_{x+n} = 0 .$$

Ora questa equazione (2)' avendo i medesimi coefficienti che l' equazione (1), è evidente che $\alpha_x \Sigma \alpha'_x$ deve essere un integrale particolare dell' equazione (1) medesima, il quale se indichiamo per $\alpha 1_x$ avremo $\alpha_x \Sigma \alpha'_x = \alpha 1_x$ e perciò $\alpha'_x = \Delta(\alpha 1_x : \alpha_x)$; ciò che ci porta a concludere che un integrale particolare dell' equazione (2) è eguale alla differenza finita del quoziente di due integrali particolari $\alpha 1_x$ e α_x dell' equazione (1); Così se indichiamo per $\alpha_x, \alpha 1_x, \alpha 2_x, \ldots \alpha(n-1)_x$ gl' n integrali particolari dell' equazione (1), e per $\alpha'_x, \alpha 1'_x, \alpha 2'_x \ldots \alpha'(n-2)_x$ gl' $n-1$ integrali particolari dell' equazione (2), avremo sul campo

$$\alpha'_x = \Delta\left(\frac{\alpha 1_x}{\alpha_x}\right), \alpha' 1_x = \Delta\left(\frac{\alpha 2_x}{\alpha_x}\right), \ldots \alpha'(n-2)_x = \Delta\left(\frac{\alpha(n-1)_x}{\alpha_x}\right).$$

E siccome l'equazione (3) è rapporto all'equazione (2); ciò che questa era rapporto all' equazione (1); perciò dagl'integrali particolari dell'equazione (2), si troveranno sul momento quelli dell'equazione (3); e così di seguito: Si vede dunque che per integrare la proposta, tutto si riduce a trovare un numero n d'integrali particolari che vi soddisfacciano nel caso di $X=0$, e l'integrale completo, avrà una forma simile a quella dell'integrale per l'equazioni a coefficienti costanti.

§. 36. Serviranno anzi un numero $n-1$ d'integrali particolari della proposta nel caso di $X=0$; Poichè l'unica diversità che si avrà, sarà il mancare un integrale particolare a ciascuna delle equazioni (1), (2), ec.; e perciò il non aversi l'integrale dell'ultima equazione (n) per mezzo di quegli dell'equazione (1); ma siccome quell'ultima equazione (n) è del primo ordine, perciò potrà sempre integrarsi; così ancora in questo caso, avendo soddisfatto a tutte le equazioni si potrà avere l'integrale completo della proposta, quando si conoscono $n-1$ integrali particolari di essa per il caso di X nullo.

Ai Geometri Condorcet e De-La-Place è dovuto questo teorema, come può vedersi nel sesto Volume delle Memorie dei Saggi Stranieri, che si pubblicano dall' Accademia delle Scienze di Parigi.

§. 37. Abbiamo detto al §. antecedente, che una equazione lineare a coefficienti variabili essendo del primo ordine può sempre integrarsi, vediamo come ciò segua. Sia da integrarsi l'equazione

$a_x \cdot y_x + y_{x+1} = X$; a_x e X sono funzioni conosciute di x.

Facendo secondo il nostro metodo $y_x = \alpha_x \Sigma z_x$ avremo queste due equazioni

$$(1) \ldots a_x \cdot \alpha_x + \alpha_{x+1} = 0$$

$$(2) \ldots \alpha_{x+1} \cdot z_x = X.$$

Per integrare l' equazione (1) ecco come si farà. Dall'equazione (1) medesima, si ha $\alpha_{x+1} = -a_x . \alpha_x$ e prendendo i logaritmi da ambe le parti, s' avrà $\log \alpha_{x+1} = \log \alpha_x + \log(-a_x)$, ovvero $\log \alpha_{x+1} - \log \alpha_x = \log(-a_x)$, e perciò $\Delta \log \alpha_x = \log(-a_x)$; onde $\log \alpha_x = \Sigma \log(-a_x)$, da cui si ricava $\alpha_x = e^{\Sigma \log(-a_x)}$ e $\alpha_{x+1} = e^{\Sigma \log(-a_{x+1})}$. Essendo e il numero, di cui il logaritmo iperbolico è l' unità. Sostituendo il valore di α_{x+1} nell' equazione (2) si avrà $z_x = X : e^{\Sigma \log(-a_{x+1})}$; e perciò l'integrale completo $y_x = \alpha_x \Sigma z_x$ sarà, aggiungendovi la costante arbitraria

$$y_x = e^{\Sigma \log(-a_x)} (A + \Sigma e^{-\Sigma \log(-a_{x+1})} . X).$$

L' integrale completo può ancora prendere questa forma

$$y_x = e^{\Sigma \log(-a_x)} (A - \Sigma e^{-\Sigma \log(-a_x)} . \frac{X}{a_x}):$$ In fatti essendo

$\Sigma \log(-a_{x+1}) = \Sigma \log(-a_x) + \log(-a_x)$, avremo

$$e^{-\Sigma \log(-a_{x+1})} = e^{-\Sigma \log(-a_x)} . e^{-\log(-a_x)} = \ldots\ldots\ldots$$

$$= e^{-\Sigma \log(-a_x)} . \frac{1}{e^{\log(-a_x)}};$$ ma $e^{\log(-a_x)} = -a_x$, dunque si avrà

$$e^{-\Sigma \log(-a_{x+1})} = -e^{-\Sigma \log(-a_x)} . \frac{1}{a_x},$$ il quale valore sostituito nella prima espressione dell' integrale completo, la cangia in quell' altra.

Per farne un esempio sia da integrarsi l' equazione $y_{x+1} =$

$2^x y_x + x^2$, avremo $a_x = -2^x$, $X = x^2$, onde

$$y_x = e^{\Sigma \log(2^x)}\left(A + \Sigma e^{-\Sigma \log(2^x)} . \frac{x^2}{2^x}\right);$$ ma $\log 2^x = X \log 2$,

dunque $\Sigma \log 2^x = \frac{x(x-1)}{2} \log 2$; onde

$$y_x = e^{\frac{x(x-1)}{2} . \log 2}\left(A + \Sigma e^{-\frac{x(x-1)}{2} . \log 2} . \frac{x^2}{2^x}\right);$$ ma

$$e^{\pm \frac{x(x-1)}{2} . \log 2} = e^{\log 2 \pm \frac{x(x-1)}{2}} = 2^{\pm \frac{x(x-1)}{2}}$$, dunque s'avrà

$$y_x = 2^{\frac{x(x-1)}{2}}\left(A + \Sigma \frac{2^{-\frac{x(x-1)}{2}} . x^2}{2^x}\right)$$ ovvero

$$y_x = 2^{\frac{x(x-1)}{2}}\left(A + \Sigma 2^{-\frac{x(x+1)}{2}} . x^2\right).$$

Ritornando alla formola generale osserveremo, che la quantità $\Sigma \log(-a_x)$ non può in generale assegnarsi, poichè non è sciolto il problema generale di determinare la somma di una funzione esplicabile dell' x; si vede adunque che l' integrazione delle equazioni lineari a differenze finite del primo ordine a coefficienti variabili; dipende dalla somma delle funzioni esplicabili.

Non sarà inutile per sempre più scoprire la natura delle equazioni lineari, mostrare come l' integrazione delle equazioni di secondo ordine, dipende dalla somma delle funzioni inesplicabili, di modo che conosciuta questa s' avrebbe sul campo, l' integrale completo delle equazioni del secondo ordine. Io ho altrove (*) mostrato tutto questo estesamente; Ripor-

(*) Opuscolo Analitico stampato in Livorno nell' anno 1793.

riporterò quello che direttamente appartiene al nostro oggetto.

§. 38. Sia da integrarsi l' equazione del secondo ordine $a_x . y_x + b_x . y_{x+1} + y_{x+2} = X$. Facciamo $y_x = \alpha_x \Sigma z_x$; ed avremo secondo quello che si è detto al §. 34., per determinare α_x e z_x le due equazioni

$$(1) \ldots a_x \alpha_x + b_x . \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2} = 0$$

$$(2) \ldots (b_x . \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) z_x + \alpha_{x+2} . z_{x+1} = X.$$

Per integrare l' equazione (1) si faccia $\alpha_x = A e^{\Sigma \log m_x}$, e sostituendo avremo, dopo aver diviso per la costante A, che però rimane indeterminata,

$a_x . e^{\Sigma \log m_x} + b_x . e^{\Sigma \log m_{x+1}} + e^{\Sigma \log m_{x+2}} = 0$, ovvero $a_x . e^{\Sigma \log m_x} + b_x . e^{\Sigma \log m_x} . e^{\log m_x} + e^{\Sigma \log m_x} . e^{\log m_x} \times e^{\log m_{x+1}} = 0$, e dividendo per $e^{\Sigma \log m_x}$, e avvertendo che $e^{\log m_x} = m_x$ s' avrà

$a_x + b_x . m_x + m_x . m_{x+1} = 0$, equazione del primo ordine, ma non lineare; si faccia in questa equazione scemare x di una unità, ed avremo

$a_{x-1} + b_{x-1} . m_{x-1} + m_{x-1} . m_x = 0$, ovvero

$m_x = -\frac{a_{x-1}}{m_{x-1}} - b_{x-1}$. Questa equazione non è integrabile; soddisfà però ad essa la funzione inesplicabile in forma di frazione continua

$$m_x = -b_{x-1} - \cfrac{a_{x-1}}{-b_{x-2} - \cfrac{a_{x-2}}{-b_{x-3} - \cfrac{a_{x-3}}{\ddots \; -b_1 - \cfrac{a_1}{A'}}}}$$

A' essendo costante arbitraria.

Così l'integrale $A e^{\Sigma \log m_x}$ dell' equazione (1) dipende dalla somma di una funzione inesplicabile di una sola variabile; e perciò ancora l'integrale della proposta dipenderà da una simile somma. L' altra equazione (2) essendo del primo ordine è sempre integrabile, come abbiamo detto al §. antecedente; infatti ponendo l' equazione (2) sotto questa forma

$\frac{b_x . \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}}{\alpha_{x+2}} . z_x + z_{x+1} = \frac{X}{\alpha_{x+2}}$ e facendo il coefficientè di z_x eguale ad a'_x, e $\frac{X}{\alpha_{x+2}} = X'$, avremo

$a'_x z_x + z_{x+1} = X'$, equazione la quale paragonata con quella del §. antecedente ci dà (lasciando la costante, che potrà sempre rimettersi)

$z_x = -e^{\Sigma \log(-a'_x)} . \Sigma e^{-\Sigma \log(-a'_x)} . \frac{X'}{a'_x}$; onde l' espressione di y_x sarà

$y_x = A e^{\Sigma \log m_x} . \Sigma z_x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= A e^{\Sigma \log m_x} . \Sigma e^{\Sigma \log(-a'_x)} . \Sigma e^{-\Sigma \log(-a'_x)} . \frac{X}{a'_x}$; e questo sa-

rà l'integrale completo dell' equazione del secondo ordine.

Infelicemente per i progressi analitici non è stata fatta da alcun Geometra alcuna ricerca sopra la somma delle funzioni inesplicabili; e perciò non si potrà ridurre il valore di y_x in una funzione esplicabile dell' x; Ma i progressi dell' analisi non sono finiti, Giovi quì aver determinato l'integrale delle equazioni del secondo ordine per mezzo della somma delle funzioni inesplicabili, come quello delle equazioni del primo ordine per la somma delle funzioni esplicabili.

§. 39. Passiamo adesso all' integrazione di alcune equazioni, le quali sono suscettibili di un integrale completo. Sia primieramente l' equazione dell' ordine n, $a_x y_x + y_{x+n} = X$. Si faccia secondo il nostro metodo $y_x = \alpha_x \Sigma z_x$, avremo (§. 34) per determinare α_x l'equazione

(1) . . . $a_x . \alpha_x + \alpha_{x+n} = 0$; e per determinare z_x l'equazione

(2) . . . $z_x + z_{x+1} + z_{x+2} + \ldots + z_{x+n-1} = \frac{X}{\alpha_{x+n}}$.

Per integrare la prima equazione, o almeno per trovarne un'integrale particolare, facciamo $\alpha_x = e^{\Sigma m_x}$, e sostituendo avremo

$a_x e^{\Sigma m_x} + e^{\Sigma m_{x+n}} = 0$, ovvero, avvertendo che

$\Sigma m_{x+n} = \Sigma m_x + m_x + m_{x+1} + \ldots + m_{x+n-1}$

dopo aver diviso per $e^{\Sigma m_x}$, avremo

$0 = a_x + e^{m_x + m_{x+1} + \ldots + m_{x+n-1}}$; e prendendone i logaritmi, l'equazione diverrà

$$m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \ldots + m_{x+n-1} = log(-a_x).$$

Tanto questa equazione, che l' equazione (2) sono due equazioni a coefficienti costanti che abbiamo insegnato ad integrare ai §. 4. e seg.

Secondo ciò che abbiamo ivi esposto, chiamando δ, δ', δ'', ... $\delta^{(n-2)}$ le $n-1$ radici dell'equazione

$1+\delta+\delta^2+\delta^3+\ldots+\delta^{n-1}=0$, la quale altro non è che questa $\frac{\delta^n-1}{\delta-1}=0$, s' avrà

$$m_x = \pm\delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \Sigma \frac{\delta''^x}{\delta'^x} \ldots \Sigma \frac{\delta^{(n-2)^x}}{\delta^{(n-3)^x}} \Sigma \frac{log(-a_x)}{\delta^{(n-2)^x}},$$ e perciò

$$a_x = e^{\Sigma m_x} = e^{\pm\Sigma\delta^x\Sigma\frac{\delta'^x}{\delta^x}\ldots\Sigma\frac{log(-a_x)}{\delta^{(n-2)^x}}}$$; e ponendo in questa equazione $x+n$ in luogo di x, avremo

$$a_{x+n} = e^{\pm\Sigma\delta^{x+n}\Sigma\frac{\delta'^{x+n}}{\delta^{x+n}}\ldots\Sigma\frac{log(-a_{x+n})}{\delta^{(n-2)^{x+n}}}}$$

Egualmente il valore di z_x sarà

$$z_x = \pm\delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \ldots \Sigma \frac{\delta^{(n-2)^x}}{\delta^{(n-3)^x}} \Sigma \frac{X}{a_{x+n} . \delta^{(n-2)}},$$ e sostituendo

il valore di a_{x+n} nel denominatore $a_{x+n} . \delta^{(n-2)^x}$, avremo

$$y_x = a_x \Sigma z_x = \pm \left(e^{\pm\Sigma\delta^x\Sigma\frac{\delta'^x}{\delta^x}\ldots\Sigma\frac{log(-a_x)}{\delta^{(n-2)^x}}} \right) \times \ldots$$

$$\left(\Sigma\,\delta^x\,\Sigma\,\frac{\delta'^x}{\delta^x}\,\Sigma\,\frac{\delta^{(n-2)^x}}{\delta^{(n-3)^x}}\,\Sigma\left(\frac{X}{\delta^{(n-2)^x}} : e^{\pm\Sigma\,\delta^{x+n}\ \ldots\ \Sigma\,\frac{log(-a_{x+n})}{\delta^{(n-2)^{x+n}}}}\right)\right)$$

i segni superiori vagliono per $n-1$ pari, e gl' inferiori per $n-1$ impari.

Questa espressione di y_x sarà l' integrale completo della proposta. I segni sommatorj saranno più delle costanti indeterminate che vi abbisognano, perciò non bisognerà aggiungere a tutte le integrazioni la costante arbitraria, servendone aggiungere un tal numero che basti per completare l' integrale.

§. 40. Se si fa $n=1$, cioè se l' equazione da integrarsi è

$a_x y_x + y_{x+1} = X$ si avrà

$y_x = \pm e^{\pm\Sigma\,log(-a_x)}\Sigma\,X\,e^{\mp\Sigma\,log(-a_{x+1})}$; e prendendo i segni superiori, quindi aggiungendo una costante arbitraria avremo

$y_x = e^{\Sigma\,log(-a_x)}(\Sigma\,X\,e^{-\Sigma\,log(-a_{x+1})} + C)$; formola che abbiamo già trovato al §. 37.

Se si fa $n=2$, cioè se l' equazione da integrarsi è $a_x y_x + y_{x+2} = X$, facendo $n=2$ nella formola generale, e prendendo i segni inferiori per essere $n-1=2-1=$ numero impari, avremo

$$y_x = -e^{-\Sigma\,\delta^x\,\Sigma\,\frac{log(-a_x)}{\delta^x}}.\Sigma\,\delta^x\,\Sigma\left(\frac{X\,e^{\Sigma\,\delta^{x+2}\,\Sigma\,\frac{log(-a_x)}{\delta^{x+2}}}}{\delta^x}\right).$$

Ora l' equazione $1+\delta=0$ dà per δ il valore $\delta=-1$, dunque sostituendo avremo

$$y_x = -e^{-\Sigma(-1)^x \Sigma \frac{\log(-a_x)}{(-1)^x}} . \Sigma(-1)^x \Sigma \frac{X}{(-1)^x} e^{\Sigma(-1)^{x+2} \Sigma \frac{\log(-a_{x+2})}{(-1)^{x+2}}} .$$

§. 41. Se si fa $X = 0$, in questo caso la formola dell' integrale diviene molto più semplice, si ha allora per l' integrale dell' equazione $a_x y_x + y_{x+n} = 0$, questa espressione

$$y_x = \pm e^{\pm \Sigma \delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \cdots \Sigma \frac{\log(-a_x)}{\delta^{(n-2)^x}}} . \Sigma \delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \cdots$$

$$\cdots \Sigma \frac{\delta^{(n-2)^x}}{\delta^{(n-3)^x}} . A .$$

Ora al §. 16. abbiamo mostrato che la quantità

$\Sigma \delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \cdots \Sigma \frac{\delta^{(n-2)^x}}{\delta^{(n-3)^x}} . A$, eseguite che siano l' integrazioni, prende questa forma

$A \delta^{(n-2)^x} + A' \delta^{(n-3)^x} + \ldots + A^{(n-3)} \delta'^x + A^{(n-2)} \delta^x + A^{(n-1)}$,
sarà adunque l' integrale completo

$$y_x = e^{\pm \Sigma \delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \cdots \Sigma \frac{\log(-a_x)}{\delta^{(n-2)^x}}} (A \delta^{(n-2)^x} + A' \delta^{(n-3)^x} +$$

$\ldots + A^{(n-2)^x} \delta^x + A^{(n-1)})$: le lettere A, A', ec. rappresentano n costanti arbitrarie; l' integrale perciò è completo.

Se tutte le costanti, eccettuato $A^{(n-1)}$ si suppongono nulle, s' avrà un integrale della proposta così espresso,

$$y_x = A^{(n-1)} e^{\pm \Sigma \delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \cdots \Sigma \frac{\log(-a_x)}{\delta^{(n-2)^x}}}$$

; anzi questo istes-

so integrale sarà anche completo, poichè gl' n segni sommatori porteranno n costanti arbitrarie.

Se si fa $n=2$, e $X=0$, avremo (§. 40.)

$$y_x = -e^{-\Sigma(-1)^x \Sigma \frac{\log(-a_x)}{(-1)^x}}\left(A(-1)^x + A'\right):$$ ora secondo i principj del calcolo integrale, si ha

$$(-1)^x \Sigma \log(-a_x).(-1)^{-x} = (-1)^x \log(-a_{x-1})\,(-1)^{-x+1} + (-1)^x \log(-a_{x-2})(-1)^{-x+2} + \ldots + (-1)^x \log(-a).(-1),$$

che si riduce a

$-\log(-a_{x-1}) + \log(-a_{x-2}) - \log(-a_{x-3}) \ldots \pm \log(-a)$: il segno inferiore è per x pari, e il superiore per x impari. Avremo pertanto

$$\begin{aligned}-\Sigma(-1)^x \Sigma \log(-a_x)(-1)^{-x} = -\Big(&-\log(-a_{x-2}) + \log(-a_{x-3}) - \log(-a_{x-4}) + \text{ec.}\\ &-\log(-a_{x-3}) + \log(-a_{x-4}) - \text{ec.}\\ &-\log(-a_{x-4}) + \text{ec.}\\ &\text{ec.}\end{aligned}$$

Facendo la somma di queste serie, e togliendo i termini che si distruggono, avremo

$-\Sigma(-1)^x \Sigma \log(-a_x)(-1)^x = \log(-a_{x-2}) + \log(-a_{x-4}) + \log(-a_{x-6}) + \log(-a_{x-8}) + \text{ec.} = \log(\pm a_{x-2} a_{x-4} a_{x-6} \times a_{x-8}.\text{ec.})$; l'ultimo fattore è a_2 se x è pari, ed è a_1 se x è dispari. Rapporto ai segni, se x è pari deve prendersi il segno superiore quando $\frac{x}{2}-1$ è pari, e l' inferiore quando $\frac{x}{2}-1$ è dispari: se poi x è dispari il segno superiore vale per $\frac{x-1}{2}$ pari e l' inferiore per $\frac{x-1}{2}$ dispari.

Se adesso si suppone che il prodotto il quale è sotto il segno logaritmico sia rappresentato da questa caratteristica $\nabla^2 . a_{x-2}$, avremo l'integrale completo così espresso

$y_x = e^{\log \pm \nabla^2 a_{x-2}} (A(-1)^x + A')$, il quale si riduce a questo

$$y_x = \pm \nabla^2 a_{x-2} (A(-1)^x + A').$$

§. 42. Si abbia adesso da integrare l'equazione dell'ordine n

$$Aa_x y_x + Ba_x . a_{x+1} . y_{x+1} + Ca_x . a_{x+1} . a_{x+2} . y_{x+2} + \ldots$$
$$\ldots + Pa_x . a_{x+1} . a_{x+2} \ldots a_{x+n} . y_{x+n} = X,$$ nella quale a_x, X sono funzioni conosciute di x, e A, B, ec. sono quantità costanti.

Per integrarla si potrà fare secondo il nostro metodo $y_x = a_x \Sigma z_x$ e si troveranno (§. 34) l'equazioni da cui dipende l'integrale della proposta: siccome però in questo caso il nostro metodo è alquanto complicato, noi lo lascieremo a parte per servirci del seguente.

Si faccia $y_x = e^{\Sigma m_x} . a_x$. Se si sostituisce questo valore di y_x nella proposta, e s'avverte che

$$\Sigma m_{x+1} = m_x + \Sigma m_x$$
$$\Sigma m_{x+2} = m_{x+1} + m_x + \Sigma m_x$$
ec.

avremo l'equazione

$$(1) \ldots Aa_x e^{\Sigma m_x} . a_x + B a_x . a_{x+1} e^{\Sigma m_x} . e^{m_x} a_{x+1} + \ldots$$
$$Ca_x . a_{x+1} . a_{x+2} . e^{\Sigma m_x} . e^{m_x} . e^{m_{x+1}} . a_{x+2} + Pa_x . a_{x+1} \ldots$$
$$\ldots a_{x+n} . e^{\Sigma m_x} . e^{m_x} . e^{m_{x+1}} \ldots e^{m_{x+n-1}} . a_{x+n} = X.$$

Si

Si divida tutta l'equazione per $a_x e^{\Sigma m_x}$; e siccome m_x, a_x sono funzioni di x da determinarsi, si faccia per determinare m_x, $a_{x+1} e^{m_x} = 1$, ed avremo $e^{m_x} = \frac{1}{a_{x+1}}$, e perciò $e^{m_{x+1}} = \frac{1}{a_{x+2}}$ ec. Prendendo ora i logaritmi avremo $m_x = -log(a_{x+1})$; onde $\Sigma m_x = -\Sigma \, log \, a_{x+1}$.

Se dunque si fanno queste sostituzioni nell'equazione (1), questa diverrà

$$A a_x + B a_{x+1} + C a_{x+2} + \ldots + P a_{x+n} = \frac{X}{a_x . e^{-\Sigma \, log \, a_{x+1}}} =$$

$e^{\Sigma \, log \, a_{x+1}} . \frac{X}{a_x}$; la quale, avendo i coefficienti costanti, avrà per integrale

$$a_x = \pm \frac{\delta^x}{A} \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \ldots \Sigma \frac{\delta^{(n-1)^x}}{\delta^{(n-2)^x}} . \Sigma \frac{X . e^{\Sigma \, log \, a_{x+1}}}{a_x . \delta^{(n-1)^x}}$$; e perciò l'integrale completo della proposta sarà

$$y_x = \pm \frac{e^{-\Sigma \, log \, a_{x+1}}}{A} . \delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \ldots \Sigma \frac{X . e^{\Sigma \, log \, a_{x+1}}}{a_x . \delta^{(n-1)^x}} .$$

Rammentiamo che le quantità $\delta, \delta', \delta''$ ec. sono le n radici dell'equazione

$A + B\delta + C\delta^2 + \ldots + P\delta^n = 0$. Si deve al Sig. La-Place l'avere il primo integrato questa equazione.

§. 43. L'equazione più generale

$$A a_x y_x + B a_x . a_{x+n} . y_{x+n} + C a_x . a_{x+n} . a_{x+2n} . y_{x+2n} + \ldots$$

$$P a_x . a_{x+n} \ldots a_{x+mn} . y_{x+mn} = X,$$ s'integra col medesimo metodo, facendo $y_x = a_x . e^{\Sigma m_x}$. Dopo avere sostituito

il valore di y_x, di y_{x+n}, ec., e aver divisa tutta l'equazione per $\alpha_x . e^{\Sigma m_x}$ si ha (facendo

$a_{x+n} . e^{m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \ldots + m_{x+n-1}} = 1$) per determinare m_x questa equazione

$m_x + m_{x+1} + \ldots + m_{x+n-1} = -log(a_{x+n})$; e per determinare α_x quest' altra equazione

$A\alpha_x + B\alpha_{x+n} + C\alpha_{x+2n} + \ldots + P\alpha_{x+mn} = \frac{X}{a_x} e^{-\Sigma m_x}$. L' equazione in m_x si è insegnata ad integrare al §. 39., e l' equazione in α_x si sa parimente integrare essendo una equazione dell' ordine nm a coefficienti costanti. Così si troverà sul momento la formola dell' integrale completo della proposta. Passiamo adesso all' equazioni lineari a più variabili.

§. 44. Si abbia la seguente equazione fra le funzioni y_x, z_x, u_x, ec.

$$\left.\begin{array}{l} ay_x + by_{x+1} + \ldots + py_{x+n} \\ + a'z_x + b'z_{x+1} + \ldots + p'z_{x+n} \\ + a''u_x + b''u_{x+1} + \ldots + p''u_{x+n} \\ \text{ec.} \end{array}\right\} = X \ldots (A)$$

e si vogliano determinare i valori completi delle variabili y_x, z_x, u_x, ec. in funzioni finite di x; si osservi che l' equazione essendo una sola, e le funzioni y_x, z_x, u_x, ec. molte di numero, il problema rimane indeterminato; e perciò con questa sola equazione è impossibile di giungere ai ricercati valori di y_x, z_x, u_x, ec.

Si supponga adunque che insieme con la proposta abbiano luogo l' equazioni

(1) . . . $a'z_x + b'z_{x+1} + \ldots + p'z_{x+n} = \phi x$

(2) . . . $a''u_x + b''u_{x+1} + \ldots + p''u_{x+n} = \phi' x$

ec.

tante di numero quante sono le funzioni y_x, z_x, u_x, ec., meno una. Le quantità $\varphi x, \varphi' x$, ec. sono funzioni arbitrarie di x indipendenti fra loro.

Con queste equazioni (1), (2), ec. si possono determinare le variabili u_x, z_x, ec., ciascuna delle quali oltre le n costanti che porta l'integrazione, conterrà una funzione arbitraria φx, e potrà perciò avere infiniti valori.

Se l'equazioni (1), (2), ec. si sottrano dalla proposta avremo per determinare y_x questa equazione

$$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + py_{x+n} = X - \varphi x - \varphi' x - \text{ec.}$$

Così l'integrazione dell'equazione (A) fra molte funzioni variabili y_x, z_x, u_x, ec. è ridotta all'integrazione d'equazioni ad una sola funzione variabile, delle quali abbiamo estesamente parlato di sopra.

§. 45. Se i coefficienti sono costanti, allora sarà per ciò che si è detto al §. 16. e segg.

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)x}}{\alpha^{(n-2)x}} \Sigma \frac{X - \varphi x - \varphi' x - \text{ec.}}{\alpha^{(n-1)x}}$$

$$z_x = \pm \frac{\delta^x}{a'} \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \ldots \Sigma \frac{\delta^{(n-1)x}}{\delta^{(n-2)x}} \Sigma \frac{\varphi x}{\delta^{(n-1)x}}$$

$$u_x = \pm \frac{\gamma^x}{a''} \Sigma \frac{\gamma'^x}{\gamma^x} \ldots \Sigma \frac{\gamma^{(n-1)x}}{\gamma^{(n-2)x}} \Sigma \frac{\varphi' x}{\gamma^{(n-1)x}}$$

ec.

essendo gl'α, i δ, i γ le radici dell'equazioni del grado n

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$$
$$a' + b'\delta + c'\delta^2 + \ldots + p'\delta^n = 0$$
$$a'' + b''\gamma + c''\gamma^2 + \ldots + p''\gamma^n = 0$$

ec. ec.

Siccome i valori di y_x, z_x, u_x, contengono delle funzioni arbitrarie $\varphi x, \varphi' x$, ec. la determinazione delle quali dipende dal nostro arbitrio, essi perciò potranno prendere infinite forme, completate tutte da un numero n di costanti arbitrarie, secondo che si assumono differenti i valori delle dette funzioni, e queste soddisfaranno tutte alla proposta.

§. 46. E' manifesto che altre qualunque equazioni diverse da quelle (1) e (2), ec. del §. 44., potrebbero supporsi aver luogo insieme con la proposta, purchè si potesse per mezzo di esse trovare i valori delle funzioni z_x, u_x, ec. i quali sostituiti nella proposta, la riducessero a non contenere che y_x; e così si potessero avere i valori completi in x delle funzioni y_x, u_x, z_x, ec.

§. 47. Se applicando all'equazione (A) del §. 44. il metodo tenuto per l'equazioni a due sole variabili y_x, x, si facesse $y_x = \alpha_x \Sigma\omega_x$, $z_x = \delta_x \Sigma\omega_x$, $u_x = \gamma_x \Sigma\omega_x$, ec. essendo $\delta_x, \alpha_x, \gamma_x, \omega_x$, ec. funzioni diverse di x da determinarsi, e si sostituissero i valori delle funzioni y_x, u_x, ec. nell'equazione (A) facendo il coefficiente di $\Sigma\omega_x$ eguale a zero, si avrebbe fra le funzioni variabili, $\alpha_x, \delta_x, \gamma_x$, ec. quest'equazione

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha_x + b\alpha_{x+1} + \ldots + p\alpha_{x+n} \\ + a'\delta_x + b'\delta_{x+1} + \ldots + p'\delta_{x+n} \\ + a''\gamma_x + b''\gamma_{x+1} + \ldots + p''\gamma_{x+n} \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} = 0,$$

e per determinare ω_x una equazione di questa forma

$$A\omega_x + B\omega_{x+1} + \ldots + P\omega_{x+n-1} = X.$$

La prima equazione non è che la proposta quando x è zero, e la seconda è una equazione dell'ordine $n-1$, fra due sole variabili ω_x, x.

Si vede adunque che integrata la proposta nel caso di $X=0$, cioè trovati i valori di y_x, z_x, u_x, ec. che soddisfanno a questo caso, s' avrà l' integrale della proposta per il caso in cui X non sia nullo.

§. 48. Se si facesse $y_x = \alpha_x \Sigma\omega_x$, $z_x = \delta_x \Sigma\theta_x$, $u_x = \gamma_x \Sigma\pi_x$, ec. essendo ancora θ_x, π_x, ec. funzioni di x da determinarsi, allora sostituendo questi valori nella proposta, e facendo i coefficienti di $\Sigma\omega_x, \Sigma\theta_x, \Sigma\pi_x$, ec. eguali a zero separatamente, avremo per determinare le variabili $\alpha_x, \delta_x, \gamma_x$, ec. le equazioni

$$a\alpha_x + b\alpha_{x+1} + \ldots + p\alpha_{x+n} = 0$$
$$a'\delta_x + b'\delta_{x+1} + \ldots + p'\delta_{x+n} = 0$$
$$a''\gamma_x + b''\gamma_{x+1} + \ldots + p''\gamma_{x+n} = 0$$

ec.,

e fra le variabili $\omega_x, \theta_x, \pi_x$, ec. l'equazione dell'ordine $n-1$, è della forma

$$\left.\begin{array}{l} a1.\omega_x + b1.\omega_{x+1} + \ldots + p1.\omega_{x+n-1} \\ + a1'.\theta_x + b1'.\theta_{x+1} + \ldots + p1'.\theta_{x+n-1} \\ + a1''.\gamma_x + b1''.\gamma_{x+1} + \ldots + p1''.\gamma_{x+n-1} \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} = X$$

I coefficienti di questa ultima equazione sono funzioni dei coefficienti della proposta, e delle variabili $\alpha_x, \delta_x, \gamma_x$, ec. i quali si ricavano dalla sostituzione dei valori di y_x, z_x, u_x, ec. nella proposta medesima.

Tenendo adesso il medesimo metodo per integrare quest' equazione dell' ordine $n-1$, che abbiamo tenuto per la proposta, si giungerà ad alcune equazioni da integrarsi, di cui il secondo membro sarà zero, e ad una equazione a più variabili dell' ordine $n-2$, che avrà il secondo membro $= X$.

Tratteremo ancora questa come la proposta, e seguendo il medesimo andamento tenuto per l'equazioni a due variabili, giungeremo finalmente ad una equazione

$(1)\mu_x + (2)\nu_x + (3)\sigma_x +$ ec. $= X$ nella quale (1), (2), (3), ec. sono coefficienti variabili, i quali dipendono dall' integrazione di equazioni, il cui secondo membro è nullo; e μ_x, ν_x, σ_x, ec. sono tre funzioni variabili, a cui si arriva per l'integrazione delle successive equazioni degl' ordini, $n, n-1, n-2, n-3$, ec. Si vede adunque che nel caso dei coefficienti costanti, si giunge sempre all' integrazione completa della proposta.

Siccome fra le variabili, μ_x, ν_x, σ_x, ec. si ha una sola equazione, restano perciò tutte indeterminate meno una, e si può per esse prendere delle funzioni arbitrarie di x; così i valori completi di y_x, u_x, z_x, ec. conterranno una funzione arbitraria.

§. 49. Se si abbia un numero m d' equazioni fra un numero $m+1$ di variabili, x, y_x, z_x, u_x, ec. si potrà sempre per mezzo dell' eliminazione giungere ad una equazione fra due sole variabili; ma questa equazione sarà di un ordine maggiore di quello delle equazioni proposte. Faremo vedere tutto questo in due equazioni di secondo ordine, e sarà facile vedere che il medesimo metodo si applica ad un qualunque numero di equazioni fra un qualunque numero di variabili.

Siano adunque da determinarsi i valori completi di y_x, z_x in funzioni di x per mezzo delle equazioni (1), (2) seguenti

$$(1) \ldots \left.\begin{aligned} a_x \cdot y_x + b_x \cdot y_{x+1} + c_x \cdot y_{x+2} \\ a'_x \cdot z_x + b'_x \cdot z_{x+1} + c'_x \cdot z_{x+2} \end{aligned}\right\} = \varphi x$$

$$(2) \ldots \left.\begin{aligned} A_x \cdot y_x + B_x \cdot y_{x+1} + C_x \cdot y_{x+2} \\ A'_x \cdot z_x + B'_x \cdot z_{x+1} + C'_x \cdot z_{x+2} \end{aligned}\right\} = \varphi' x$$

nelle quali tanto i coefficienti, chè il secondo membro sono funzioni date dell' x.

Se ricaviamo dalla seconda equazione il valore di z_{x+2} e lo sostituiamo nella prima, avremo una equazione di questa forma

$$(3) \ldots \left.\begin{array}{l} a1_x . y_x + b1_x . y_{x+1} + c1_x . y_{x+2} \\ a'1_x . z_x + b'1_x . z_{x+1} \end{array}\right\} = \varphi 1\,(x),$$ nella

quale i coefficienti, e il secondo membro saranno quelli che porta una tal sostituzione.

Se in questa equazione facciamo che x divenga $x+1$, avremo

$$(4) \ldots \left.\begin{array}{l} a1_{x+1} . y_{x+1} + b1_{x+1} . y_{x+2} + c1_{x+1} . y_{x+3} \\ a'1_{x+1} . z_{x+1} + b'1_{x+1} . z_{x+2} \end{array}\right\} = \varphi 1\,(x+1).$$

Se adesso si sostituisce in questa equazione il valore di z_{x+2} ricavato dalla equazione (2), avremo una equazione di questa forma

$$(5) \ldots \left.\begin{array}{l} a2_x . y_x + b2_x . y_{x+1} + c2_x . y_{x+2} + d2_x . y_{x+3} \\ a'2_x . z_x + b'2_x . z_{x+1} \end{array}\right\} = \varphi 2\,(x)$$

$a2_x$, $b2_x$, ec. $\varphi 2\,(x)$ rappresentano i coefficienti dopo questa sostituzione. Il valore di z_{x+1} ricavato da questa equazione (5), si sostituisca nell' equazione (3), ed avremo una equazione di questa forma

$$(6) \ldots \left.\begin{array}{l} a3_x . y_x + b3_x . y_{x+1} + c3_x . y_{x+2} + d3_x . y_{x+3} \\ + a'3_x . z_x \end{array}\right\} = \varphi 3(x),$$

la quale ci da il valore di z_x. Se per mezzo delle due equazioni (3) e (5) avessimo eliminato z_x, avremmo avuto il valore di z_{x+1}, il quale, facendovi x crescere di una

unità, darebbe ancora il valore di z_{x+2}. Ora sostituiti questi tre valori nell' equazione (1), questa diverrà solamente fra le variabili x, y_x, sarà però del quarto ordine ed avrà questa forma

$$(P) \ldots a4_x . y_x + b4_x . y_{x+1} + c4_x . y_{x+2} + d4_x . y_{x+3} + e4_x . y_{x+4} = X;$$

$a4_x, b4_x$, ec. X rappresentano funzioni variabili conosciute, e sono funzioni dei coefficienti delle equazioni proposte e dei suoi secondi membri.

L' integrazione adunque delle due equazioni (1), (2) dipende dall' integrazione dell' equazione (P), della quale si è parlato sopra.

§. 50. E' facile vedere che se i coefficienti della proposta sono costanti; ancora i coefficienti della risultante equazione (P) sono parimente costanti, e perciò essa è sempre integrabile.

L' ordine dell' equazioni proposte (1), (2) era il medesimo. Potrebbe essere anche diverso nelle due equazioni; giacchè sarebbe cosa facile di ridurre l' equazioni al medesimo ordine con l' aggiungere i termini che mancano, e fare nella finale equazione risultante, eguali a zero i coefficienti dei termini aggiunti.

Si vede come abbiamo avvertito che questo metodo è generale per qualunque numero m d' equazioni, fra un numero qualunque $m+1$ di variabili, e di qualunque ordine n.

§. 51. Nel caso dei coefficienti costanti, se i secondi membri sono nulli, possiamo anche così trattare quelle equazioni proposte. Si faccia $y_x = \alpha^x$, $z_x = \alpha^x . l$, essendo α, l due costanti da determinarsi. Sostituendo questi valori nelle equazioni (1), (2) avremo dopo aver tutto diviso per α^x

$$\left.\begin{array}{l} a + b\alpha + c\alpha^2 \\ + (a' + b'\alpha + c'\alpha^2) l \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ + (A' + B'\alpha + C'\alpha^2) l \end{array}\right\} = 0,$$ dalle quali si devono determina-

re

re α, ed l. Preso il valore di l da una di queste equazioni, e sostituito nell' altra, dopo averla ridotta s' avrà per determinare α la seguente equazione

$$(a+b\alpha+c\alpha^2)(A'+B'\alpha+C'\alpha^2)-(a'+b'\alpha+c'\alpha^2)(A+B\alpha+C\alpha^2)=0.$$

Questa equazione algebraica essendo del quarto grado ci darà quattro valori per α, per mezzo dei quali s' avranno altrettanti valori di l. Questi valori di α e di l ci daranno quattro valori particolari di y_x e z_x, i quali moltiplicati per delle costanti arbitrarie, e sommati ci daranno i valori completi di y_x e di z_x: Così se i quattro valori di α sono α, α', α'', α''', e quelli di l siano l, l', l'', l''', avremo per il valore completo di y_x questa espressione

$y_x = A\alpha^x + A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + A'''\alpha'''^x$, e per z_x quest' altra

$$z_x = A\alpha^x . l + A'\alpha'^x . l' + A''\alpha''^x . l'' + A'''\alpha'''^x . l'''.$$

Le costanti A, A', A'', A''' dell' y_x sono le medesime che quelle di z_x.

Ad una equazione differenziale del quarto ordine saremmo giunti se avessimo adoprato il metodo del §. 49., e tale equazione avendo tutti i coefficienti costanti, per essere integrata ci avrebbe dato da risolvere una equazione algebraica del quarto grado.

§. 52. Fin ora abbiamo supposto che la differenza della variabile x fosse l' unità, ovvero che la variabile x crescesse della quantità 1, ed abbiamo insegnato per questo caso ad integrare l' equazioni lineari. Vediamo adesso come giungere si possa all' integrazione delle medesime equazioni quando la differenza finita Δx dell' x, è una qualunque costante a, ovvero una funzione qualunque variabile Fx della medesima x.

Sia pertanto da integrarsi l' equazione

(A) . . . . $ay_x + by_{x'} + cy_{x''} + \ldots + py_{x^{(n)}} = X$, nella quale

a, b, c, ec., p, X sono costanti, o funzioni date di x; $x' = x + \Delta x$, $x'' = x' + \Delta x'$, $x''' = x'' + \Delta x''$, ec. $x^{(n)} = x^{(n-1)} + \Delta x^{(n-1)}$.

Si faccia $y_x = a_x \Sigma z_x$, essendo a_x, z_x due funzioni di x da determinarsi: Avremo

$$y_{x'} = a_{x'} \Sigma z_{x'}$$
$$y_{x''} = a_{x''} \Sigma z_{x''}$$
$$y_{x'''} = a_{x'''} \Sigma z_{x'''}$$

. . . .

. . . .

$$y_{x^{(n)}} = a_{x^{(n)}} \Sigma z_{x^{(n)}}.$$

Ora rappresentando per Σz_x la somma dei termini, che precedono z_x, per $\Sigma z_{x'}$ la somma di quelli che precedono $z_{x'}$, e così di seguito, nella serie

$z_{'''x}, z_{''x}, z_{'x}, z_x, z_{x'}, z_{x''}, z_{x'''}$, essendo

$$'''x = ''''x + \Delta''''x$$
$$''x = '''x + \Delta'''x$$
$$'x = ''x + \Delta''x$$
$$x = 'x + \Delta'x$$
$$x' = x + \Delta x$$
$$x'' = x' + \Delta x'$$

ec.

Avremo

$$y_x = a_x \Sigma z_x$$
$$y_{x'} = a_{x'} (z_x + \Sigma z_x)$$
$$y_{x''} = a_{x''} (z_x + z_{x'} + \Sigma z_x)$$
$$y_{x'''} = a_{x'''} (z_x + z_{x'} + z_{x''} + \Sigma z_x)$$

. . . .

. . . .

$$y_{x^{(n)}} = a_{x^{(n)}} (z_x + z_{x'} + \ldots + z_{x^{(n-1)}} + \Sigma z_x).$$

Sostituendo questi valori nella proposta e seguendo il medesimo andamento che al §. 34. avremo

$$\left.\begin{array}{r}(a.\alpha_x+b.\alpha_{x'}+c.\alpha_{x''}+\ldots+p.\alpha_{x^{(n)}})\Sigma z_x\\ +(b.\alpha_{x'}+c.\alpha_{x''}+\ldots+p.\alpha_{x^{(n)}})z_{x'}\\ +(c.\alpha_{x''}+\ldots+p.\alpha_{x^{(n)}})z_{x''}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ +p.\alpha_{x^{(n)}}.z_{x^{(n-1)}}\end{array}\right\}=X.$$

Se si fà il coefficiente di Σz_x eguale a zero, s' avrà per determinare α_x questa equazione $a.\alpha_x+b.\alpha_{x'}+c.\alpha_{x''}+\ldots+p.\alpha_{x^{(n)}}=0$, dell' ordine n a differenze variabili, e nella quale il secondo membro è zero; E per determinare z_x una equazione di questa forma

$b'z_x+c'z_{x'}+\ldots+p'z_{x^{(n-1)}}=X$, dell' ordine $n-1$ a differenze parimente variabili.

La prima non è altro che la proposta fattovi in essa $X=0$, e la seconda è una equazione di un ordine inferiore di una unità della proposta.

Trattando questa ultima equazione come l' equazione (A), e seguendo parola a parola il medesimo metodo tenuto al §. 34., (mutando però $x, x+1, x+2$, ec., $x+n$ in x, x', x'', ec., $x^{(n)}$) si giungerà al medesimo Teorema, che abbiamo ivi trovato per le equazioni a differenze costanti eguali all' unità a coefficienti variabili; e si vedrà che la forma dell' integrale completo delle equazioni che quì trattiamo è, come di quelle

$y_x=\alpha_x\Sigma\alpha'_x\Sigma\alpha''_x\ldots\Sigma\alpha_x^{(n-1)}\Sigma z_x^{(n-1)}$ rappresentando per i segni Σ le somme di termini nelle serie, nelle quali la x cresce da un termine all' altro della quantità variabile Δx. Le funzioni α_x, α'_x, ec. $z_x^{(n-1)}$ dipendono da equazioni a

differenze variabili di cui il secondo membro è eguale a zero.

Tutta la difficoltà adunque si riduce, egualmente che nelle altre equazioni, a integrare queste equazioni lineari quando il secondo membro è nullo.

§. 53. Per questo supponghiamo che il valore di y_x sia $\alpha_u \Sigma z_x$, essendo u una funzione di x da determinarsi, e α_u una funzione di u parimente da determinarsi.

Indicando per u' ciò che diviene u, quando in esso x cresce di Δx, per u'' ciò che diviene u' nel medesimo caso, ec., avremo

$$y_x = \alpha_u \Sigma z_x$$

$$y_{x'} = \alpha_{u'} \Sigma z_{x'} = \alpha_{u'} (z_x + \Sigma z_x)$$

$$y_{x''} = \alpha_{u''} \Sigma z_{x''} = \alpha_{u''} (z_x + z_{x'} + \Sigma z_x)$$

. . . .

. . . .

$$y_{x^{(n)}} = \alpha_{u^{(n)}} \Sigma z_{x^{(n)}} = (z_x + \ldots + z_{x^{(n-1)}} + \Sigma z_x).$$

Sostituendo questi valori nella proposta, eguagliando a zero il coefficiente di Σz_x, e indicando per b', c', ec. p', i coefficienti di z_x, $z_{x'}$, ec. $z_{x^{(n-1)}}$ avremo queste due equazioni

$$(1) \ldots \; a\alpha_u + b\alpha_{u'} + c\alpha_{u''} + \ldots + p\alpha_{u^{(n)}} = 0$$

$$(2) \ldots\ldots \; b'z_x + c'z_{x'} + \ldots + p'z_{x^{(n-1)}} = X,$$ dall' integrale delle quali dipende l' integrale della proposta (A).

Ora osserviamo che nell' equazione (1) non solo è indeterminata la funzione α_u di u, ma ancora la u medesima funzione di x: Essendo adunque due le indeterminate, ed una sola l' equazione fra di esse, una di queste indeterminate dipenderà dal nostro arbitrio. Si faccia adunque servire la u alla seguente condizione: Sia u tal funzione di x, che quando x cresce della sua differenza finita Δx, tutto l' aumento

che riceve la u, cioè Δu, sia eguale all'unità; così determinata la u avremo

$$u' = u + \Delta u = u + 1$$
$$u'' = u' + \Delta u' = u + 2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$u^{(n)} = u^{(n-1)} + \Delta u^{(n-1)} = u + n$, e perciò l' equazione (1) diverrà

$a\alpha_u + b\alpha_{u+1} + c\alpha_{u+2} + \ldots + p\alpha_{u+n} = 0$, che è una equazione dell' ordine n a differenze finite eguali all' unità, i cui coefficienti sono variabili, perchè sono funzioni di x ovvero di u; potendosi sempre determinare x per u, quando u è determinato per x. Per mezzo di questa equazione si ha il valore di α_u.

Trattando l' equazione (2) come abbiamo fatto la proposta, e tenendo il medesimo andamento che al §. 34., si vedrà che l'integrale completo della proposta avrà questa forma

$y_x = \alpha_u \Sigma\alpha'_u \Sigma\alpha''_u \ldots \Sigma\alpha_u^{(n-1)} \Sigma z_x^{(n-1)}$, u essendo una funzione di x, che abbia la proprietà sopra accennata: α_u, α'_u, ec. $\alpha_u^{(n-1)}$ sono funzioni di u determinate da equazioni in u, simili a quelle (1),(2),(3), ec. (n) in x del §. 34. delle quali i secondi membri sono zero.

Così l' integrazione delle equazioni lineari a differenze variabili, si è ridotta, o dipende dall' integrazione d' equazioni lineari a differenze costanti eguali all' unità (*).

§. 54. Ma parliamo di quelle equazioni, i cui coefficienti a, b, c, ec., p sono costanti, giacchè di queste sole se ne può avere l' integrale completo.

Si faccia in questo caso $y_x = \alpha^x \Sigma z_x$, α essendo una co-

(*) Questa idea di ridurre l' integrazione delle equazioni lineari a differenze variabili, a quella d' equazioni a differenze costanti, si deve ai Sigg. La Place, Condorcet; è stata poi seguita da Cousin ed altri Geometri.

stante da determinarsi, ed u una tal funzione di x, che crescendo x della differenza Δx, u cresca dell' unità.

Prendendo i valori di $y_{x'}$ di $y_{x''}$ ec., sostituendoli nella proposta, facendo eguale a zero il coefficiente di Σz_x, e indicando per b', c', ec. p' i coefficienti di z_x, $z_{x'}$, ec. $z_{x(n-1)}$ divisi per α^u, avremo queste due equazioni

$$(1) \ldots a\alpha^u + b\alpha^{u+1} + c\alpha^{u+2} + \ldots + p\alpha^{u+n} = 0$$

$$(2) \ldots b'z_x + c'z_{x'} + \ldots + p'z_{x(n-1)} = \frac{X}{\alpha^u}.$$

Così si vede che tenendo il medesimo metodo da noi adoprato al §. 4. e segg. e dando al segno sommatorio Σ il significato quì sopra spiegato, avremo

$$y_x = \pm \frac{\alpha^u}{a} \Sigma \frac{\alpha'^u}{\alpha^u} \Sigma \frac{\alpha''^u}{\alpha'^u} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^u}}{\alpha^{(n-2)^u}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^u}}.$$

Le costanti $\alpha, \alpha', \alpha''$, ec. ... $\alpha^{(n-1)}$ sono al solito le n radici dell' equazione

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$$

Tutta adunque la difficoltà dell' integrazione dell' equazioni a differenze variabili, si riduce alla ricerca della funzione u.

§. 55. Rappresentiamo per u_x questa funzione dell' x, tale che quando x cresce della differenza variabile Δx; la funzione u_x cresca dell' unità. Questa proprietà sarà espressa dall' equazione $u_{x+\Delta x} = u_x + 1$, dalla quale si ricava

$u_{x+\Delta x} - u_x = 1$, e perciò integrando $u_x = \Sigma 1$; così la ricercata funzione è eguale all' integrale finito dell' unità preso quell' integrale secondo il sistema di differenza variabile, che regna nella proposta.

L' integrale pertanto dell' equazioni lineari dell' ordine n nel caso dei coefficienti costanti sarà

$$y_x = \pm \frac{\alpha^{\Sigma 1}}{a} \Sigma \frac{\alpha'^{\Sigma 1}}{\alpha^{\Sigma 1}} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)\Sigma 1}}{\alpha^{(n-2)\Sigma 1}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)\Sigma 1}} .$$

Se la differenza dell' x fosse eguale per esempio ad una costante b', si avrebbe $\Sigma 1 = \frac{x}{b'} + C$ e facendo per più semplicità $C = 0$, si ha $\Sigma 1 = \frac{x}{b'}$; e l' integrale sarà quello trovato quì sopra se invece di $\Sigma 1$ vi si pone $\frac{x}{b'}$.

Si può ancora far dipendere la ricerca del valore di u dall' integrazione d' una equazione a differenze finite costanti del primo ordine, ma non lineare. Infatti siccome è $u_{x+\Delta x} = u_x + 1 = u + 1$ s' avrà $x + \Delta x = p_{u+1}$ indicando per p_{u+1} una funzione di $u_x + 1$ ovvero di $u + 1$. Ora supponghiamo $\Delta x = \varphi(x) - x$, ed avremo $x + \varphi(x) - x = p_{u+1}$ e perciò $\varphi(x) = p_{u+1}$.

Siccome poi si ha $u_x = u$, $u_{\varphi(x)} = u + 1$, e u_x, $u_{\varphi(x)}$ sono due simili funzioni in x e $\varphi(x)$; sarà perciò x eguale ad una funzione di u simile a quella di $u + 1$ cui è eguale $\varphi(x)$, cioè sarà $x = p_u$: sostituendo il valore di x nell' equazione $\varphi(x) = p_{u+1}$, s' avrà $\varphi(p_u) = p_{u+1}$, equazione dalla di cui integrazione dipende il valore di p_u, ovvero di x, e perciò di u in funzione di x. Percorriamo alcuni casi d' integrabilità di questa equazione.

§. 56. Sia $\varphi(x) = ax + b$, ove a e b sono quantità costanti, ed avremo allora $p_{u+1} = ap_u + b$ ovveso $ap_u - p_{u+1} = -b$; e facilmente troveremo, perciò che si è detto (§. 13.) $p_u = -\frac{a^u}{a} \Sigma \frac{-b}{a^u} = ba^{u-1} \Sigma \frac{1}{a^u}$, poichè dall' equazione $a - \alpha = 0$ si ri-

cava $a = a$; Eseguendo ora l' integrazione si avrà

$$p_u = ba^{u-1}\left(\frac{\frac{1}{a^u}}{\frac{1}{a}-1}+C\right) = ba^{u-1}\left(\frac{a^{-u+1}}{1-a}+C\right);$$ ovvero

$$p_u = \frac{b+Cba^{u-1}}{1-a} = -\frac{Cba^{u-1}-b}{a-1},$$ e mutando la forma della costante cioè facendo $C = -\frac{Ca}{b}$, s' avrà $p_u = \frac{Ca^u - b}{a-1}$.

Se si suppone $C = 1$, se si prende cioè un integrale particolare, s' avrà $p_u = \frac{a^u - b}{a-1}$, onde $x = \frac{a^u - b}{a-1}$.

Da questa ultima equazione si ricava $u = \frac{\log(b+(a-1)x)}{\log a}$.

Se $\phi(x) = ax^m$, avremo $p_{u+1} = ap_u^m$, e ponendo $p_u = a^{q_u}$, s' otterrà $a^{q_{u+1}} = a^{mq_u+1}$; e prendendo i logaritmi si ha $q_{u+1}\log a = (mq_u + 1)\log a$, ovvero $q_{u+1} = mq_u + 1$, equazione lineare del primo ordine, la quale integrata ci dà

$$q_u = \frac{Cm^u - 1}{m-1};$$ onde $p_u = x = a^{\frac{Cm^u-1}{m-1}}$, dalla quale si ricava prendendo due volte i logaritmi

$$u = \frac{\log\left(\frac{1}{C}+\frac{(m-1)\log x}{C\log a}\right)}{\log m}$$ e facendo $C = \frac{1}{\log a}$ s' avrà

$$u = \frac{\log\log ax^{m-1}}{\log m}.$$ Non ci estenderemo di più sopra queste ricerche particolari.

Da

Da tutto ciò che abbiamo detto si conclude adunque che l' integrazione dell' equazioni a differenze variabili sarà in potere degl' Analisti, quando alcun Geometra avrà insegnato ad integrare completamente l'equazione $\phi(p_u) = p_{u+1}$; ovvero a trovare il valore generale di $\Sigma 1$ ricerche ambedue della medesima difficoltà.

§. 57. Se alcune radici delle equazioni algebraiche, le quali bisogna risolvere per avere gl' integrali delle equazioni lineari, fossero immaginarie, ecco come si opererebbe. E' noto per ciò che si dimostra nell' Algebra Cartesiana, che queste radici immaginarie saranno della forma $A + B\sqrt{-1}$, e quando non lo siano potranno sempre ridurvisi, essendo A, e B quantità reali. E' parimente dimostrato, che se in una equazione algebraica vi è una radice della forma $A + B\sqrt{-1}$, ve ne deve essere un' altra ancora della forma $A - B\sqrt{-1}$; dunque nel caso delle radici immaginarie vi saranno nell' espressione completa dell' integrale, contenute sotto i segni sommatorj le quantità $(A + B\sqrt{-1})^x$, $(A - B\sqrt{-1})^x$: Eseguite però l' integrazioni come se gl' immaginarj non vi fossero, compariranno ancora nella formola sviluppata dell' integrale delle quantità immaginarie, le quali elimineremo se ci piace col sostituirvi delle quantità trascendenti, e dare una certa forma alle costanti arbitrarie portate dalle integrazioni. Così nel caso che il secondo membro dell' equazione lineare del §. 16., sia $X = 0$, e che l' equazione algebraica, abbia due radici α', α immaginarie, di modo che sia $\alpha' = a + b\sqrt{-1}$, $\alpha = a - b\sqrt{-1}$, gl' ultimi due termini dell' integrale avuto al citato paragrafo saranno

$$A^{(n-2)}(a + b\sqrt{-1})^x + A^{(n-1)}(a - b\sqrt{-1})^x:$$

Rammentiamo che $A^{(n-2)}$, $A^{(n-1)}$ sono due costanti arbitrarie. Ora è dimostrato nell' analisi dei finiti, che $(a \pm b\sqrt{-1})^x = \cos x\beta \pm \sqrt{-1}\,.\,\operatorname{sen} x\beta$, essendo β l' arco che ha per tangente $\frac{a}{b}$; dunque sostituendo avremo così espressi gl' ultimi

due termini dell' integrale completo,

$$A^{(n-2)}(\cos x\beta+\sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\,x\beta)+A^{(n-1)}(\cos x\beta-\sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\,x\beta),$$

i quali si riducono a

$$(A^{(n-2)}+A^{(n-1)})\,.\cos x\beta+(A^{(n-2)}-A^{(n-1)})\sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\,x\beta,$$

e mutando la forma delle costanti arbitrarie, cioè facendo

$A^{(n-2)}+A^{(n-1)}=C,$

$(A^{(n-2)}-A^{(n-1)})\sqrt{-1}=C'$, avremo $C\cos x\beta+C'\,\text{sen}\,x\beta$ per gl' ultimi due termini dell' integrale; si vede come si opererebbe per qualunque altro paro di radici immaginarie.

Nel caso poi che il secondo membro dell' equazione non fosse zero, e che due radici α, α' siano immaginarie, i due primi termini $\frac{\alpha^x(A+\Sigma\frac{X}{\alpha^x})}{m}+\frac{\alpha'^x(A'+\Sigma\frac{X}{\alpha'^x})}{m'}$ dell' integrale completo sviluppato al §. 32., prenderanno questa forma

$$\frac{(a+b\sqrt{-1})^x(A+\Sigma\frac{X}{(a+b\sqrt{-1})^x})}{p+q\sqrt{-1}}+\frac{(a-b\sqrt{-1})^x(A'+\Sigma\frac{X}{(a-b\sqrt{-1})^x})}{p-q\sqrt{-1}},$$

essendo $p+q\sqrt{-1}$ ciò che diviene m, allorchè si fà in essa α immaginaria; e $p-q\sqrt{-1}$ il valore di m' per il caso che α' è immaginaria. Riducendo questi due termini al medesimo denominatore, e sostituendovi le quantità trascendenti invece degl' esponenziali, avremo

$$\Big\{(p-q\sqrt{-1})(\cos x\beta+\sqrt{-1}.\,\text{sen}\,x\beta)(A+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\,x\beta})+(p+q\sqrt{-1})\,(\cos x\beta-\sqrt{-1}\times$$
$$\text{sen}\,x\beta)(A'+\Sigma\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\text{sen}\,x\beta})\Big\}:p^2+q^2;$$

Eseguendo le moltiplicazioni avremo

$$\Big\{(Ap+A'p-Aq\sqrt{-1}+A'q\sqrt{-1})(\cos x\beta)+(Ap\sqrt{-1}+qA-$$

$$A'p\sqrt{-1}+qA')(\operatorname{sen} x\beta)+p\cos x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}+$$

$$p\cos x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}+p\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta\times\ldots\ldots$$

$$\Sigma\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}-p\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta\Sigma\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}-$$

$$q\sqrt{-1}.\cos x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}+q\sqrt{-1}.\cos x\beta\times$$

$$\Sigma\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}+q\operatorname{sen} x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}+$$

$$q\operatorname{sen} x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}\Big\}:p^2+q^2,$$ i coefficienti dei primi due termini sotto le parentesi, cioè

$Ap+A'p-Aq\sqrt{-1}+A'q\sqrt{-1}$, e $Ap\sqrt{-1}+qA-A'p\sqrt{-1}+qA'$, si possono a causa delle costanti arbitrarie che contengono, eguagliare a due altre costanti arbitrarie C, C': così quei due primi termini diverranno $C\cos x\beta+C'\operatorname{sen} x\beta$.

Gl' altri otto termini, non considerando per ora il divisore p^2+q^2, si riducono ai seguenti

$$p\cos x\beta.\Sigma\Big(\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}+\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}\Big)$$

$$+p\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta.\Sigma\Big(\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}-\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}\Big)$$

$$+q\sqrt{-1}.\cos x\beta.\Sigma\Big(-\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}+\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}\Big)$$

$$+q\operatorname{sen} x\beta.\Sigma\Big(\frac{X}{\cos x\beta+\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}+\frac{X}{\cos x\beta-\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta}\Big);$$

Riducendo ora al medesimo denominatore le quantità sotto i segni sommatorj, alcuni degl' immaginarj si distruggono ed abbiamo

$$p\cos x\beta.\Sigma\frac{2\cos x\beta.X}{(\cos x\beta)^2+(\operatorname{sen} x\beta)^2}+p\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta X \ldots\ldots$$

$$\Sigma\frac{-2\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta.X}{(\cos x\beta)^2+(\operatorname{sen} x\beta)^2}+q\sqrt{-1}.\cos x\beta.\Sigma\frac{2\sqrt{-1}.\operatorname{sen} x\beta.X}{(\cos x\beta)^2+(\operatorname{sen} x\beta)^2}+$$

$$q\operatorname{sen} x\beta.\Sigma\frac{X.2\cos x\beta}{(\cos x\beta)^2+(\operatorname{sen} x\beta)^2};$$ E portando fuori dei segni sommatorj le quantità costanti, e gl' immaginarj, avremo (facendo eguale all' unità il quadrato del coseno più quello del seno)

$$2p\cos x\beta.\Sigma\cos x\beta.X+2p\operatorname{sen} x\beta.\Sigma\operatorname{sen} x\beta.X-$$
$$2q\cos x\beta\,\Sigma\operatorname{sen} x\beta.X+2q\operatorname{sen} x\beta.\Sigma\cos x\beta.X=$$
$$(2p\cos x\beta+2q\operatorname{sen} x\beta)\Sigma\cos x\beta.X+(2p\operatorname{sen} x\beta-$$
$$2q\cos x\beta)\Sigma\operatorname{sen} x\beta.X$$

Invece adunque dei due primi termini dell' integrale completo del §. 32., nel caso di due radici immaginarie, prenderemo i due seguenti

$$\frac{C.\cos x\beta+(2p\cos x\beta+2q\operatorname{sen} x\beta).\Sigma\cos x\beta.X}{p^2+q^2}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{C'\operatorname{sen} x\beta+(2p\operatorname{sen} x\beta-2q\cos x\beta).\Sigma\operatorname{sen} x\beta.X}{p^2+q^2}$$ i quali non contengono più quantità immaginarie, ma solo quantità trascendenti.

Il medesimo si dirà di qualunque altro paio di radici eguali.

§. 58. Le costanti che entrano nelle superiori integrazioni possono essere, come osservò il primo il Sig. Euler, variabili, purchè esse non mutino allorchè la variabile x cresce della sua differenza 1. Per trovare questa forma, sup-

ponghiamo che essa sia rappresentata da $\varphi(x)$: facendo in essa crescere l'x dell'unità avremo $\varphi(x+1)$; ma non dovendo questa funzione variare sarà $\varphi(x)=\varphi(x+1)$, ovvero $\varphi(x+1)-\varphi(x)=0$; e questa equazione sarà quella che determina la forma di $\varphi(x)$. Integrando tale equazione per le cose dette al §. 13., si ha $\varphi(x)=\alpha^x \Sigma \frac{0}{\alpha^x}=\alpha^x C$, essendo C una costante arbitraria.

Ora per determinare α si ha l'equazione $\alpha-1=0$; e perciò $\alpha=1$. Si sa dall'analisi dei finiti, che, se per $2p$ rappresentiamo la circonferenza del circolo, l'unità è $1=e^{\pm 2mp\sqrt{-1}}$, m essendo qualunque numero intero; dunque avremo $\alpha=e^{\pm 2mp\sqrt{-1}}$; e perciò $\varphi(x)=Ce^{\pm 2mpx\sqrt{-1}}$ e questa sarà la forma variabile che possono prendere le costanti degl' integrali; ora la conversione delle quantità immaginarie in quantità trascendenti ci dà

$e^{\pm 2mpx\sqrt{-1}}=\cos 2mpx \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\, 2mpx$; avremo perciò ancora questa forma per $\varphi(x)$, $C(\cos 2mpx \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\, 2mpx)$. Infatti $2mp$ rappresentando un certo numero di periferie, è chiaro che se $2mpx$ rappresenta un certo arco l; $2mp(x+1)$ sarà eguale a $2mp+l$, vale a dire ad un multiplo della periferia del circolo + l'arco l: ora è dimostrato in trigonometria che $\cos l$ è il medesimo di $\cos(l+2mp)$; dunque $\cos 2mpx$ non varierà quando x cresce dell'unità. Il medesimo ragionamento vale per $\text{sen}\, 2mpx$: la quantità adunque $C \cos 2mpx \pm C\sqrt{-1}\, \text{sen}\, 2mpx$ non varierà variando x, poichè le due parti di cui è composta conservano sempre il medesimo valore. Ora essendo C una quantità arbitraria, e le due parti della funzione conservandosi sempre costanti indipendentemente una dall'altra, potremo fare $C\sqrt{-1}$, eguale ad una costante indeterminata B, avremo così per la forma ricercata $A \cos 2mpx \pm B\, \text{sen}\, 2mpx$. Ancora più generalmente potremo rappresentare le costanti arbitrarie che entrano negl' integrali, per una funzione qualunque Ψ

della quantità $A \cos 2mpx \pm B \operatorname{sen} 2mpx$, cioè per $\Psi(A \cos 2mpx \pm B \operatorname{sen} 2mpx)$.

§. 59. Passiamo adesso a vedere l'applicazione che possiamo fare delle cose dette di sopra; cominciamo dalle serie. Siano di una serie

gl' Indici	$0, 1, 2 \ldots \ldots x, x+1$, ec.
i Termini	$y_0 \; y_1 \; y_2 \ldots \ldots y_x \; y_{x+1}$ ec.

Se fra un numero qualunque di termini di questa regna una equazione qualunque, di modo che un termine sia conosciuto per mezzo degl'altri che lo precedono, tal serie forma la classe delle serie ricorrenti: Noi parleremo di quelle nelle quali l'equazione che lega i termini della serie è lineare.

Fra i problemi che si possono proporre sopra le serie, i principali sono due, cioè la ricerca del termine generale, e della somma; vedremo come la di loro soluzione dipenda dall'integrazione di una equazione a differenze finite.

Sia adunque da trovarsi il termine generale, in una serie nella quale ciascun termine, come y_{x+n} aumentato di una quantità X, funzione di $x+n$, è eguale alla somma di tutti i termini antecedenti y_{x+n-1}, y_{x+n-2}, ec. y_x moltiplicati ciascuno per le quantità $a, b \ldots p$.
Ponendo in equazione questa proprietà, avremo

$X + y_{x+n} = ay_x + by_{x+1} + \ldots + py_{x+n-1}$ la quale si riduce a questa

$ay_x + by_{x+1} + \ldots + py_{x+n-1} - y_{x+n} = X$, che è evidentemente una equazione lineare a differenze finite dell' ordine n. I Coefficienti a, b, ec. possono essere costanti, o variabili. Se sono costanti, unico caso per una soluzione completa, l'integrale di quell'equazione o il valore di y_x è stato dato al §. 13., ed ha questa forma

$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{e} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}}$, nella quale $\alpha, \alpha', \ldots$

$\alpha^{(n-1)}$ sono le radici dell'equazione $a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^{n-1} - \alpha^n = 0$. Tale sarà l'espressione del termine generale y_x della serie proposta. Tutto pertanto si riduce a semplici integrazioni.

Nel caso di $X = 0$ si potrà prendere ancora la forma data al §. 16., la quale è

$$y_x = A\alpha^{(n-1)x} + A'\alpha^{(n-2)x} + \ldots + A^{(n-1)}\alpha^x.$$ Le quantità A, A', ... $A^{(n-1)}$ sono costanti arbitrarie.

L'espressione del termine generale conterrà adunque n costanti arbitrarie, le quali si determineranno per mezzo degl' n primi termini della serie, che devono essere dati, poichè solo dopo un tal numero di termini comincia ad avere luogo l'equazione. Tutto si renderà chiaro con degl'esempi.

§. 60. Si voglia il termine generale della serie

indici,	0	1	2	3	4	5	...	x
Termini	1	2	4	9	30	157	...	y_x

Nella quale un termine qualunque y_{x+3} è eguale al 5. inalzato alla potenza x, sommato con i termini y_{x+2}, y_{x+1}, y_x moltiplicati il primo per 9, il secondo per -26, il terzo per 24. Avremo in questo caso tal proprietà espressa da questa equazione

$$y_{x+3} = 5^x + 9y_{x+2} - 26y_{x+1} + 24y_x,$$ ovvero

$$-24 \cdot y_x + 26 \cdot y_{x+1} - 9 \cdot y_{x+2} + y_{x+3} = 5^x$$ equazione del terzo ordine.

Per l'equazioni di un tale ordine l'integrale è

$$y_x = -\frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \Sigma \frac{X}{\alpha''^x}.$$

Per il nostro caso $a = -24$, $X = 5^x$, $\alpha, \alpha', \alpha''$ sono le radici di questa equazione

$\alpha^3 - 9\alpha^2 + 26\alpha - 24 = 0$, e perciò $\alpha = 2$, $\alpha' = 3$, $\alpha'' = 4$; avremo adunque

$y_x = \frac{2^x}{24} \Sigma \frac{3^x}{2^x} \Sigma \frac{4^x}{3^x} \Sigma \frac{5^x}{4^x}$; e facendo le successive integrazioni averemo

$y_x = \frac{2^x}{24}\left(4 . \frac{5^x}{2^x} + A \frac{4^x}{2^x} + A' \frac{3^x}{2^x} + A''\right) = \frac{5^x}{6} + A \, . \, 4^x + A' \, . \, 3^x + A'' \, . \, 2^x$, essendo A, A', A'' le tre costanti arbitrarie portate dall' integrazioni. Avremo così trovato l' espressione del termine generale.

Per determinare le costanti, facciamo nell' espressione del termine generale successivamente $x = 0, 1, 2$, ed avremo

$y_0 = 1 = \frac{1}{6} + A + A' + A''$

$y_1 = 2 = \frac{5}{6} + 4A + 3A' + 2A''$

$y_2 = 4 = \frac{25}{6} + 16A + 9A' + 4A''$

Per mezzo delle quali equazioni si trova $A = -\frac{3}{6}$, $A' = \frac{3}{6}$, $A'' = \frac{5}{6}$, e sostituiti nell' espressione generale di y_x avremo il termine generale della nostra serie così espresso

$$y_x = \frac{5^x - 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^x}{6}.$$

Si può verificare questo valore nei termini della serie che seguono il terzo, e che sono sopra espressi.

Per un secondo esempio si abbia la serie

Indici	0	1	2	3	4	5	.	.	.	x
Termini	0	0	1	5	17	49	.	.	.	y_x

nella

nella quale un termine qualunque come y_{x+3} è eguale alla somma dei termini antecedenti, il primo moltiplicato per 5, il secondo per -8, il terzo per 4. Avremo adunque...

$y_{x+3} = 5y_{x+2} - 8y_{x+1} + 4y_x$ ovvero

$-4y_x + 8y_{x+1} - 5y_{x+2} + y_{x+3} = 0.$

Avremo perciò che si è detto al §. 13.

$y_x = -\frac{\alpha^x}{a}\Sigma\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{\alpha''^x}{\alpha'^x}\Sigma 0$. Ora in questo caso $a = -4, \alpha = \alpha' = 2, \alpha'' = 1$, e perciò

$y_x = \frac{2^x}{4}\Sigma\frac{2^x}{2^x}\Sigma\frac{1^x}{2^x}\Sigma 0$, ovvero avvertendo che la somma dello zero è una costante E

$y_x = \frac{2^x}{4}\Sigma\Sigma 2^{-x}.\,E = \frac{2^x}{4}\Sigma\left(\frac{2^{-x+1}}{1-2}E + B\right) = \frac{2^x}{4}\left(\frac{2^{-x+2}}{(1-2)(1-2)}E + Bx + A\right)$; onde infine mutando la forma delle costanti

$y_x = E + Bx\,.\,2^x + A\,.\,2^x.$

Ora facendo successivamente $x = 0, 1, 2$, si hanno per determinare queste costanti le tre equazioni

$$0 = E + A$$
$$0 = E + 2B + 2A$$
$$1 = E + 8B + 4A$$

dalle quali si ricava $A = -1$, $E = 1$, $B = \frac{1}{2}$, onde avremo

$y_x = 1 + x\,.\,2^{x-1} - 2^x.$

Per trovare poi la somma di un numero x termini di una serie è evidente che non s'avrà a fare altro che pren-

dere l' integrale finito del valore del termine generale. Così nel caso dei coefficienti costanti, chiamando z_x questa somma, avremo

$$z_x = \pm \frac{1}{a} \Sigma \alpha^x \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \; . \; . \; . \; \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}}.$$

Così nell' esempio superiore, nel quale il termine generale è

$y_x = 1 + x \,.\, 2^{x-1} - 2^x$, la somma sarà

$z_x = \Sigma y_x = \Sigma 1 + \Sigma x \,.\, 2^{x-1} - \Sigma 2^x$; perciò eseguendo l' integrazioni

$$z_x = x + x \,.\, 2^{x-1} - 2^{x+1} + C.$$

Per determinare C si ha facendo $x = 0$, $z_0 = 0 = -2 + C$, e però $C = 2$, onde $z_x = x + x\, 2^{x-1} - 2^{x+1} + 2$.

S' avverta che per z_x si rappresenta la somma di tutti i termini

$$y_{x-1} + y_{x-2} + \; . \; . \; . + y_0.$$

Perciò se si fà $x = 5$, avremo

$z_5 = y_4 + y_3 + y_2 + y_1 + y_0 = 5 + 5 \,.\, 16 - 64 + 2 = 23$, come si può verificare nella serie.

Se si fa $x = 6$ avremo la somma dei primi 6 termini della serie, fino cioè a y_5 inclusive, e sarà

$$z_6 = 6 + 6 \,.\, 32 - 128 + 2 = 200 - 128 = 72.$$

Quantunque dipendendo la ricerca del termine generale dall' integrazione di una equazione a differenze finite, la ricerca della somma, la quale suppone conosciuto il termine gene-

rale, vi dipenda anche in conseguenza; pure è facile mostrare, che si può far dipendere ancora questa somma direttamente dall' integrazione di una equazione a differenze finite.

§. 61. Infatti se si prendono le somme dei membri dell' equazione del §. 58., considerati costanti i suoi coefficienti s' avrà

$$a\Sigma y_x + b\Sigma y_{x+1} + \ldots + p\Sigma y_{x+n-1} + \Sigma y_{x+n} = \Sigma X;$$ e chiamando z_x la somma dei termini fino ad y_{x-1} inclusive, avremo $\Sigma y_x = z_x + C$, essendo C la costante che porta il segno sommatorio. Ora sostituendo nell' equazione questi valori, essa si trasformerà in questa

$$a(z_x + C) + b(z_{x+1} + C) + c(z_{x+2} + C) + \ldots + p(z_{x+n-1} + C) + z_{x+n} + C = \Sigma X.$$

Questa equazione dalla quale si deve ricavare il valore di z_x è una equazione a differenze finite dell' ordine n, egualmente che era quella del termine generale, ed ha ancora i medesimi coefficienti. S' avrà adunque per $z_x + C$ questo valore

$$z_x + C = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)x}}{\alpha^{(n-2)x}} \Sigma \frac{\Sigma X}{\alpha^{(n-1)x}};$$ a, a', ec. sono le medesime che al §. 58. l' unica diversità nella forma dei due valori di y_x e di $z_x + C$ è che in quest' ultimo vi è ΣX in vece di X.

§. 62. Se supponghiamo che X sia nullo, l' equazione dalla quale si ricavava il termine generale, è

$$(A) \ldots ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + py_{x+n} + y_{x+n} = 0,$$ e quella dalla quale si determina la somma, è

$$(B) \ldots a(z_x + C) + b(z_{x+1} + C) + c(z_{x+1} + C) + \ldots + p(z_{x+n-1} + C) + z_{x+n} + C = 0.$$

La sola inspezione di queste due equazioni serve per farci comprendere, che l' equazione (A) si converte nell' equazione (B) ponendovi $z_x + C$ in luogo di y_x; e che sono tutte e due del medesimo ordine con i medesimi coefficienti; se adunque (§. 16.) si trova per y_x

$y_x = A\alpha^{(n-1)^x} + A'\alpha^{(n-2)^x} + \ldots + A^{(n-1)}.\alpha^x$, sarà nel momento

$$z_x = C + A\alpha^{(n-1)^x} + A'\alpha^{(n-2)^x} + \ldots + A^{(n-1)}\alpha^x.$$

Conviene avvertire che le costanti, le quali entrano nel termine generale sono ben diverse da quelle che hanno luogo nella somma. Le prime sono date dalla cognizione degl' n primi termini della serie, i quali somministrano n equazioni (§. 59.) fra le medesime costanti; e le seconde dalle $n+1$ prime somme della serie, per mezzo delle quali se ne ottengono $n+1$ equazioni.
Siccome poi le prime $n+1$ somme si ricavano dalle somme dei primi n termini della serie; così sarà facilissimo vedere come, sommando le prime equazioni e paragonandole con le seconde, le costanti contenute nella somma possono determinarsi per mezzo di quelle del termine generale.

Si osservi che se l' equazione in α contiene alcune radici, come $\alpha^{(n-1)} = \alpha^{(n-2)} = \phi = 1$ il valore di y_x conterrà i termini (§. 17.)

$A(1)^x + A'(1)^x x + \text{ec.}$ ovvero $A + A'x + \text{ec.}$, in tal caso la somma deve contenere per questi, i termini $Ax + A'x^2 + \text{ec.}$ Così infatti porterebbe l' integrazione del termine generale.

§. 63. Avremmo potuto ricavare a dirittura l' espres-

sione di z_x del §. antecedente dall' osservare che l' integrazione del termine generale, allorchè questo non contiene che quantità esponenziali, non porta variazione che nelle costanti.

Abbiamo veduto al §. antecedente che l' equazione la quale determina z_x è

$$(B) \ldots a(z_x + C) + b(z_{x+1} + C) + \ldots + p(z_{x+n-1} + C) + z_{x+n} + C = 0.$$

Se si facesse $C = 0$ questa diverrebbe

$$az_x + bz_{x+1} + cz_{x+2} + \ldots + pz_{x+n-1} + z_{x+n} = 0.$$

Risolvendo questa equazione si avrà un valore particolare di z_x, ovvero un integrale particolare dell' equazione (B). Ora essendo l'equazione (B) la medesima che quella la quale determina y_x ne risulta questo Teorema.

L' integrale completo dell' equazione a differenze finite, il quale determina il termine generale è un' integrale particolare dell' equazione a differenze finite, che determina la somma.

§. 64. Se i coefficienti dell' equazione, dalla quale dipende il termine generale fossero variabili, il metodo adoprato per far da quella dipendere la somma non servirebbe. In questo caso siccome si ha sempre $y_x = z_{x+1} - z_x, y_{x+1} = z_{x+2} - z_{x+1}$ ec., $y_{x+n} = z_{x+n+1} - z_{x+n}$, sostituendo perciò questi valori nell' equazione che dà il termine generale si avrà l' equazione fra z_x, z_{x+1}, ec., z_{x+n+1} a differenze finite a coefficienti variabili, che determina la somma, la quale è dell' ordine $n+1$.

Così allorquando i coefficienti sono variabili, l' equazione lineare che determina la somma è di un ordine superiore di una unità a quello che determina il termine generale.

Ciò che abbiamo detto fin quì serve per mostrare il rap-

porto fra la somma ed il termine generale di una serie. Da altro Geometra era stato osservato tal rapporto, con la diversità però che ancora nel caso dei coefficienti costanti, che era quello solo considerato, la somma si faceva dipendente da una equazione lineare di un ordine superiore di una unità a quella del termine generale.

§. 65. Tutti i problemi che hanno rapporto ai giochi d'azzardo, e che formano ciò che si dice la scienza delle probabilità, dipendono dall'integrazioni delle equazioni a differenze finite. Noi ne esporremo alcuno di quelli che si sciolgono per mezzo dell'integrazione delle equazioni che abbiamo trattate.

Conviene quì premettere che si stima la probabilità di un evento per il numero dei casi favorevoli diviso per il numero di tutti i casi possibili.

Si cerchi ora quanto è la probabilità perchè un numero di palle prese a caso da un vaso, sia pari, ovvero impari.

Chiamando x il numero delle palle contenute nel recipiente, è chiaro che le due probabilità tanto per prendere un numero di palle pari, quanto per prenderne un numero impari, saranno due funzioni del numero totale delle palle x. Rappresentiamo adunque per y_x la somma dei casi, nei quali il numero delle palle che si prenderà può essere pari; z_x la somma di quei casi nei quali il numero può essere impari.

Se si aumenta la x di una unità, y_{x+1} esprimerà la somma dei casi pari, ed è chiaro che sarà eguale a y_x+z_x, poichè ogni caso impari per l'aggiunta della nuova palla diviene pari, s'avrà adunque questa equazione

$$y_{x+1}=z_x+y_x.$$

Egualmente z_{x+1} sarà la somma di tutti i casi impari, dopo che alle palle contenute nel recipiente ne ho aggiunta una; questo numero sarà eguale a z_x numero dei casi impari pri-

ma dell' aggiunta dell' unità, più y_x (poichè ogni numero pari aggiuntavi l' unità diviene impari) più l' unità, che è il caso per la nuova palla che si aggiunge, avremo per ciò un altra equazione

$z_{x+1}=z_x+y_x+1$. Il problema adunque si risolve con l' integrazione di queste due equazioni

$y_x-y_{x+1}+z_x=0$

$y_x+z_x-z_{x+1}=-1$.

Secondo ciò che abbiamo detto al §. 49. si può da queste due equazioni eliminare z_x e si verrà all' equazione del secondo ordine $y_{x+2}-2y_{x+1}=1$, la quale si riduce del primo facendo scemare l' x d' una unità, e diviene

$y_{x+1}-2y_x=1$; si ha per tanto

$y_x=\frac{\alpha^x}{2}\Sigma\frac{1}{\alpha^x}$, essendo α la radice dell' equazione $\alpha-2=0$, per il che $\alpha=2$; dunque

$y_x=2^{x-1}\Sigma 2^{-x}=2^{x-1}(-2^{-x+1}+A)$, $y_x=A2^{x-1}-1$. Per determinare la costante A, si osservi, che quando $x=1$, si ha $y_1=0$, perchè non vi sono casi pari, onde $y_1=A2^{1-1}-1=0$, dal che si ricava $A-1=0$, $A=1$; Avremo adunque $y_x=2^{x-1}-1$.

Sostituendo questo valore di y_x nella prima equazione avremo $z_x=2^{x-1}$. La somma adunque di tutti i casi possibili sarà $z_x+y_x=2^{x-1}+2^{x-1}-1=2^x-1$; così la probabilità per prendere un numero pari di palle sarà $\frac{2^{x-1}-1}{2^x-1}$; e quel-

la per prenderne un numero impari $\frac{2^{x-1}}{2^x-1}$. Vi sarà adunque sempre più probabilità per il numero impari, che per il numero pari.

Per un altro esempio, cercheremo quante sono le combinazioni a due a due di un numero x di lettere. E' chiaro che questo numero di combinazioni dipenderà dal numero delle lettere, e sarà perciò una funzione di esso, che noi rappresenteremo per y_x. Se la x cresce di una unità, cioè se si aggiunge una lettera, y_{x+1} esprimerà allora il numero di queste combinazioni, e sarà eguale a quelle che si facevano prima più x, poichè ogni lettera unita con quella che si è posto di nuovo, dà un' altra combinazione, onde avremo $y_{x+1}=y_x+x$; dalla integrazione della quale ricaveremo

$y_x=\Sigma x=\frac{x(x-1)}{2}$ poichè la costante è zero.

§. 66. La determinazione delle funzioni arbitrarie che soddisfacciano ad alcune equazioni, dipende dall' integrazione delle equazioni a differenze finite. Infatti se si abbiano per esempio le due equazioni.

$$u_x=\varphi(\alpha_x)+u'_x\Psi(\delta_x)$$

$$p_x=\varphi(\alpha'_x)+p'_x\Psi(\delta'_x)$$

nelle quali $u_x, p_x, \alpha_x, \alpha'_x, \delta_x, \delta'_x, u'_x, p'_x$, siano funzioni date ed indipendenti dalla x, e si vogliano determinare le forme delle funzioni indeterminate φ, Ψ, che sono necessarie perchè quelle equazioni siano identiche.

Si faccia $\alpha'_x=\alpha_{x+\omega}$, ω potrà sempre determinarsi; quindi supponendo che nella prima equazione x cresca della quantità ω s' avrà

$u_{x+\omega}=\varphi(\alpha'_{x+\omega})+u'_{x+\omega}\Psi(\delta_{x+\omega})$, la quale sottratta dalla seconda dà

p_x-

$$p_x - u_{x+\omega} = -u'_{x+\omega}.\Psi(\delta_{x+\omega}) + p'_x.\Psi(\delta'_x).$$

Ora se si fa $\delta_{x+\omega} = t$, s' avrà x dato in funzione di t, e supponghiamo che sia $\delta'_x = t + \Delta t$, avremo, chiamando q_t, q'_t i coefficienti in funzione di t; e chiamando parimente T il primo membro, avremo dico

$T = q_t . \Psi t + q'_t \Psi(t + \Delta t)$: equazione del primo ordine a differenze variabili, poichè Δt è una funzione di t: Il di lei integrale sarà adunque (§. 37.)

$$\Psi t = e^{\Sigma \log - \frac{qt}{q't}} \left(C - \Sigma e^{-\Sigma \log - \frac{q_t}{q'_t}} . \frac{T . q_t}{q'_t} \right)$$ eseguendo le integrazioni secondo il sistema di differenza variabile che regna (§. 55.).

Questa ricerca ha luogo nella determinazione degl' integrali completi delle equazioni a differenze finite e parziali. Infatti sia l' equazione

$u_{z,x,y} = \varphi(\alpha'_{x,y}) + \delta_{x,y} \Psi(\delta'_{x,y})$ nella quale $u_{z,x,y}$ è una funzione cognita di z, x, y; egualmente $\alpha'_{x,y}, \delta_{x,y}, \delta'_{x,y}$ sono funzioni parimente cognite di x, y; e i segni φ, Ψ indicano funzioni arbitrarie. Tale equazione rappresenta, come vedremo altrove, l' integrale completo di una equazione a differenze parziali del secondo ordine. Ora se si propone di determinare le funzioni φ, Ψ in modo che fatto $y = m_x$ si abbia dall' equazione proposta $z = n_x$; e fatto $y = m'_x$ si abbia parimente $z = n'_x$, è evidente che sostituendo nell' equazione $y = m_x$, $z = n_x$ essa diviene

$u_{x, m_x, n_x} = \varphi(\alpha'_{x, m_x}) + \delta_{x, m_x} \Psi(\delta'_{x, m_x})$ la quale deve es-

sere identica; e parimemte sostituendo nella proposta $y = m'_x$, $z = n'_x$ s' avrà

$u_{x, m'_x, n'_x} = \varphi(\alpha'_{x, m'_x}) + \delta_{x, m'_x} \cdot \Psi(\delta'_{x, m'_x})$, che deve essere parimente identica.

Tutto adunque si riduce a determinare i due valori di φ, Ψ per mezzo di queste due equazioni, che sono della forma di quelle che abbiamo considerate.

§. 67. Per farne un esempio si prenda l'equazione $z = \varphi(x-y) + \Psi(x+y)$ che è l' integrale completo dell' equazione a differenze parziali $\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z}{dx^2} = 0$; e si vogliano determinare le due funzioni φ, Ψ in modo che facendo $y = ax$, si abbia $z = bx^m$, e facendo $y = cx$ si abbia $z = ex^n$, essendo costanti le quantità a, b, c, e, m, n. Sostituendo nella proposta i primi valori di z e di y, poi i secondi s' avrà per determinare φ, Ψ le due equazioni

$$bx^m = \varphi(1-a)x + \Psi(1+a)x$$

$$ex^n = \varphi(1-c)x + \Psi(1+c)x.$$

Ora si faccia $(1-c)x = (1-a)(x+\omega)$ ed avremo $\omega = \frac{a-c}{1-a}x$.

Si faccia nella prima equazione crescere x della quantità variabile $\frac{a-c}{1-a}x$, ed avremo

$bx^m\left(\frac{1-c}{1-a}\right)^m = \varphi(1-c)x + \Psi\frac{(1-c)(1+a)}{1-a}x$, e sottraendo da questa equazione la seconda, s'avrà

$$bx^m\left(\frac{1-c}{1-a}\right)^m - ex^n = \Psi\frac{(1-c)(1+a)}{1-a}x - \Psi(1+c)x.$$

Se ora si fa $\frac{(1-c)(1+a)}{1-a}x = t$, si ha $x = \frac{(1-a)t}{(1-c)(1+a)}$, e sostituendo questo valore di x nella superiore avremo

$\frac{bt^m}{(1+a)^m} - e\frac{t^n(1-a)^n}{(1-c)^n(1+a)^n} = \Psi t - \Psi\frac{(1+c)(1-a)}{(1-c)(1+a)}t$ se ora si fa

$\frac{(1+c)(1-a)}{(1-c)(1+a)}t = t + \Delta t$, indicando per Δ la differenza finita,

avremo $\Delta t = \frac{2(c-a)t}{(1-c)(1+a)}$. Il secondo membro adunque dell' equazione sarà $\Psi t - \Psi(t + \Delta t)$ che si rappresènta da $-\Delta\Psi t$, poichè non è altro che la differenza finita di Ψt: avremo adunque

$\Delta\Psi t = e\frac{t^n(1-a)^n}{(1-c)^n(1+a)^n} - \frac{bt^m}{(1+a)^m}$; ed integrando

$\Psi t = \frac{e(1-a)^n}{(1+a)(1-c)}\Sigma t^n - \frac{b}{(1+a)^m}\Sigma t^m$, fatta però l'integrazione nel sistema che la differenza di t sia $\frac{2(c-a)t}{(1-c)(1+a)}$.

Per avere questo integrale si determini per t tal funzione (§. 54.) z di t, che quando t cresce della quantità costante At; z cresca dell' unità, ed avremo $t = \frac{(A+1)^z}{A}$, infatti sarà

$t + At = \frac{(A+1)^z}{A} + \frac{A(A+1)^z}{A} = \frac{(A+1)^{z+1}}{A}$; onde

$\Sigma t^n = \Sigma\frac{(A+1)^{nz}}{A^n} = \frac{(A+1)^{nz}}{A^n((A+1)^n-1)} + C$; e risostituendo il valore di z, si ha $\Sigma t^n = \frac{t^n}{(A+1)^n-1}$; e perciò

$$\Psi t = \frac{e(1-a)^n}{(1+a)(1-c)}\cdot\frac{t^n}{(A+1)^n-1} - \frac{b}{(1+a)^m}\cdot\frac{t^m}{(A+1)^m-1}$$

Considerando adesso che per noi la costante A è $= \frac{2(c-a)}{(1-c)(1+a)}$, s' avrà sostituendo

$$\Psi t = \frac{e(1-a)^n t^n}{(1-a)^n(1+c)^n - (1+a)^n(1-c)^n} - \frac{b(1-c)^m t^m}{(1-a)^m(1+c)^m - (1+a)^m(1-c)^m} + C$$

Per trovare la forma dell' altra funzione ϕ, servirà nella funzione Ψ fare le quantità a, c negative, poichè quella funzione contiene $-y$ invece di y, avremo adunque

$$\Psi t = \frac{e(1+a)^n t^n}{(1+a)^n(1-c)^n - (1-a)^n(1+c)^n} - \frac{b(1+c)^m t^m}{(1+a)^m(1-c)^m - (1-a)^m(1+c)^m}.$$

Ora dovendo essere per noi $\Psi(x+y)$ simile a Ψt, questa funzione si troverà ponendo $x+y$ in luogo di t; come pure s' avrà $\phi(x-y)$, ponendo $x-y$ per t nella funzione ϕt. L' integrale adunque che soddisfarà alle condizioni richieste sarà (avéndo fatto la somma delle due funzioni).

$$z = \frac{e(1-a)^n(x+y)^n - e(1+a)^n(x-y)^n}{(1-a)^n(1+c)^n - (1+a)^m(1-c)^m} - \frac{b(x+y)^m(1-c)^m - b(1+c)^m(x-y)^m}{(1-a)^m(1+c)^m - (1+a)^m(1-c)^m}.$$

Non ci tratterremo a dare ulteriori esempj, poichè il fin quì detto serve per mostrare l' uso dell' integrazioni dell' equazioni a differenze finite, nella determinazione delle funzioni.

FINE DEL CAPITOLO I.

CAPITOLO II.

Delle equazioni lineari a differenze infinitesime.

§. 1. SE per y si rappresenta una funzione qualunque di x, e per $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. i di lei differenziali di primo, secondo ordine ec. divisi per dx, dx^2, ec., una equazione fra le variabili x, y e le dette differenziali, si chiama una equazione a differenze infinitesime; e se tanto la y che le sue differenziali non vi sono elevate a potenze maggiori dell' unità, allora quella si chiama una equazione *lineare* a differenze infinitesime: L' ordine di una tale equazione è marcato dalla più alta differenziale dell' y; così una equazione dicesi del primo, secondo, terzo, ec. n^{esimo} ordine, quando il più alto differenziale dell' y è del primo; secondo, terzo, ec. n^{esimo} ordine. Si ricava da questo che la forma delle equazioni lineari di un ordine qualunque n è la seguente

$ay + b\frac{dy}{dx} + c\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + p\frac{d^ny}{dx^n} = X$, nella quale a, b, c, ec., p, X possono essere o costanti, ovvero funzioni di x.

Nel caso che i coefficienti nel primo membro siano funzioni di x, l' equazione dicesi *lineare a coefficienti variabili;* e nel caso che questi non contengano la x dicesi *lineare a coefficienti costanti*.

Comincieremo dal supporre costanti i coefficienti, ed X funzione qualunque di x.

(1) . . . $a + b\alpha + c\alpha^2 + e\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n = 0$, e per determinare z l' equazione

$$(B) \ldots b'z + c'\frac{dz}{dx} + e'\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots + p'\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = \frac{X}{e^{\alpha x}},$$ nella quale

$$b' = b + 2c\alpha + 3e\alpha^2 + \ldots + np\alpha^{n-1}$$

$$c' = c + 3e\alpha + 2.3f\alpha^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}p\alpha^{n-2}$$

$$e' = e + 4f\alpha + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p\alpha^{n-3}$$

. . . .

$$p' = p.$$

E' facile anche vedere, che se si rappresenta per P il primo membro dell' equazione (1) avremo

$$b' = \frac{dP}{1.d\alpha}$$

$$c' = \frac{d^2P}{1.2.d\alpha^2},$$

$$e' = \frac{d^3P}{1.2.3.d\alpha^3},\ \text{ec.}$$

$$p' = \frac{d^nP}{1.2.3\ldots n.d\alpha^n}.$$

L' equazione che determina z ed in conseguenza quella a cui si è fin' ora ridotta l' integrazione della proposta è una equazione lineare dell' ordine $n-1$ a coefficienti costanti.

§. 3. Per determinare il valore di z si faccia $z = e^{\alpha_1 x} \times \int z'dx$, essendo α_1 un altra costante, e z' una funzione di x ambedue da determinarsi.

Sosti-

numero il cui logaritmo iperbolico è l'unità), sarà allora

$$y = e^{\alpha x}\int z dx$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\alpha x}(\alpha\int z dx + z)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\alpha x}(\alpha^2\int z dx + 2\alpha z + \frac{dz}{dx})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\alpha x}(\alpha^3\int z dx + 3\alpha^2 z + 3\alpha\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2})$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{\alpha x}(\alpha^n\int z dx + n\alpha^{n-1} z + \frac{n(n-1)}{2}.\alpha^{n-2}.\frac{dz}{dx} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\times$$

$$\alpha^{n-3}.\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots + \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}):$$ sostituite queste espressioni

nella proposta, e ordinata secondo le differenziali della z, diverrà

$$e^{\alpha x}(a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n)\int z dx + e^{\alpha x}(b + 2c\alpha + 3e\alpha^2 + \ldots +$$

$$np\alpha^{n-1})z + e^{\alpha x}(c + 3e\alpha + 3.2.f\alpha^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}p\alpha^{n-2})\times$$

$$\frac{dz}{dx} + e^{\alpha x}(e + 4f\alpha + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p\alpha^{n-3})\frac{d^2z}{dx^2} + e^{\alpha x}\times$$

$$(f + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}p\alpha^{n-4})\frac{d^3z}{dx^3} + \ldots + e^{\alpha x}\times$$

$$p\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = X.$$

Se adesso si suppone che il coefficiente del primo termine sia zero, avremo dopo aver diviso per $e^{\alpha x}$, per determinare α l' equazione

(1) . . . $\alpha + b\alpha + c\alpha^2 + e\alpha^3 + \ldots + p\alpha^n = 0$, e per determinare z l' equazione

$$(B) \ldots b'z + c'\frac{dz}{dx} + e'\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots + p'\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = \frac{X}{e^{\alpha x}},$$ nella quale

$$b' = b + 2c\alpha + 3e\alpha^2 + \ldots + np\alpha^{n-1}$$

$$c' = c + 3e\alpha + 2.3f\alpha^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}p\alpha^{n-2}$$

$$e' = e + 4f\alpha + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p\alpha^{n-3}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$p' = p.$$

E' facile anche vedere, che se si rappresenta per P il primo membro dell' equazione (1) avremo

$$b' = \frac{dP}{1.d\alpha}$$

$$c' = \frac{d^2P}{1.2.d\alpha^2},$$

$$e' = \frac{d^3P}{1.2.3.d\alpha^3}, \text{ ec.}$$

$$p' = \frac{d^nP}{1.2.3\ldots n.d\alpha^n}.$$

L' equazione che determina z ed in conseguenza quella a cui si è fin' ora ridotta l' integrazione della proposta è una equazione lineare dell' ordine $n-1$ a coefficienti costanti.

§. 3. Per determinare il valore di z si faccia $z = e^{\alpha_1 x} \times \int z' dx$, essendo α_1 un altra costante, e z', una funzione di x ambedue da determinarsi.

Sosti-

Sostituendo nell' equazione (B) i valori dei differenziali della z, e facendo il coefficiente di $\int z'dx$ eguale a zero e seguendo il medesimo andamento del §. antecedente, avremo per determinare α_1 l'equazione algebraica del grado $n-1$

(2) . . . $b'+c'\alpha_1+e'\alpha_1^2+\ldots+p'\alpha_1^{n-1}=0$ e per determinare z' l' equazione dell' ordine $n-2$ della forma

(C) . . . $c''z'+e''\frac{dz'}{dx}+\ldots+p''\frac{d^{n-2}z'}{dx^{n-2}}=\frac{X}{e^{\alpha x}\cdot e^{\alpha_1 x}}$ nella quale

$c''=c'+2e'\alpha_1+3f'\alpha_1^2+\ldots+(n-1)p'\alpha_1^{n-2}$

$e''=e'+3f'\alpha_1+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}p'\alpha_1^{n-3}$

. . . .

. . . .

$p''=p'$.

Sostituendo adesso il valore di z in

$y=e^{\alpha x}\int z dx$, si avrà

$y=e^{\alpha x}\int e^{\alpha_1 x}dx\int z'dx$, essendo z' dato da una equazione lineare a coefficienti costanti dell' ordine $n-2$; e così l' integrale della proposta dipenderà dall' integrazione di una equazione lineare di un ordine inferiore di due unità a quello della proposta medesima.

§. 4. Prima d' andare oltre tratteghiamoci ad esaminare l' equazione (2): se a questa moltiplicata per α_1 s' aggiunga l' equazione (1), avremo l' equazione (2)'

$\frac{X}{e^{\alpha x} \cdot e^{(\alpha'-\alpha)x} \cdot e^{(\alpha''-\alpha')x} \cdot e^{(\alpha'''-\alpha'')x}}$. Ora abbiamo

$y = e^{\alpha x} \int z dx$, ... e fatto $z = e^{(\alpha'-\alpha)x} \int z' dx$ si ha

$y = e^{\alpha x} \int e^{(\alpha'-\alpha)x} dx \int z' dx$ . . . . e fatto $z' = e^{(\alpha''-\alpha')x} \int z'' dx$ si ha

$y = e^{\alpha x} \int e^{(\alpha'-\alpha)x} dx \int e^{(\alpha''-\alpha')x} dx \int z'' dx$ e fatto $z'' = e^{(\alpha'''-\alpha'')x} \int z''' dx$ si ha

$y = e^{\alpha x} \int e^{(\alpha'-\alpha)x} dx \int e^{(\alpha''-\alpha')x} dx \int e^{(\alpha'''-\alpha'')x} dx \int z''' dx$; Potremo adunque concludere in generale che se le radici dell' equazione (1) sono $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, ec. $\alpha^{(n-1)}$ avremo

$$z''' = e^{(\alpha''''-\alpha''')x} \int z'''' dx$$

$$z'''' = e^{(\alpha^{v}-\alpha'''')x} \int z^{v} dx \text{ ed infine}$$

$$z^{(n-2)} = e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x} \int z^{(n-1)} dx,$$

La quantità $z^{(n-1)}$ sarà data da una equazione dell' ordine $n-(n-1)-1$ che è zero, vale a dire da una equazione che non contiene più differenziali; e tale equazione è

$$p^{(n-2)} z^{(n-1)} = \frac{X}{e^{\alpha x} \cdot e^{(\alpha'-\alpha)x} \cdot e^{(\alpha''-\alpha)x} \cdots\cdots e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}};$$

la quale si riduce a

$z^{(n-1)} = \frac{X}{p e^{\alpha^{(n-1)} x}}$ poichè $p^{(n-2)} = p^{(n-3)} = \ldots = p'' = p' = p$.

Egl' è facile vedere che continuando a fare le successive sostituzioni di z''', z'''', ec. $z^{(n-1)}$ nel valore di y avremo

$$y = \frac{1}{p} e^{\alpha x} \int e^{(\alpha'-\alpha)x} dx \int e^{(\alpha''-\alpha')x} dx \ldots \int e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)})x} dx \int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}} dx.$$

Tale espressione di y, contenendo n segni integrali, questi porteranno n costanti arbitrarie, e perciò una simile espressione sarà l' integrale completo della proposta. Tutto questo ha una perfetta analogia e somiglianza con ciò che abbiamo detto delle equazioni a differenze finite.

Per farne un esempio supponghiamo che sia proposta per integrarsi, l' equazione

$\frac{d^3y}{dx^3} - 6m\frac{d^2y}{dx^2} + 11m^2\frac{dy}{dx} - 6m^3y = n^x$: paragonando questa equazione con l' equazione generale del §. 2. avremo $a = -6m^3$, $b = 11m^2$, $c = -6m$, $p = 1$, $X = n^x$, e l' equazione algebraica da risolversi sarà

$\alpha^3 - 6m\alpha^2 + 11m^2\alpha - 6m^3 = 0$; della quale indicando per α, α', α'' le radici, avremo $\alpha = 3m$, $\alpha' = 2m$, $\alpha'' = m$; l' integrale adunque della proposta sarà

$y = e^{3mx}\int e^{-mx} dx \int e^{-mx} dx \int \frac{n^x}{e^{mx}} dx$. Ora

$$\int \frac{n^x}{e^{mx}} dx = \frac{n^x}{e^{mx}} : \log\left(\frac{n}{e^m}\right) + A = \frac{\frac{n^x}{e^{mx}}}{-m + \log n} + A,$$ e

stante che porta l' integrazione: così

$$\int e^{-mx} dx \left(\frac{\frac{n^x}{e^{mx}}}{-m + \log n} + A\right) = \int \left(\frac{\frac{n^x}{e^{2mx}}}{-m + \log}\right.$$

$$\frac{\frac{n^x}{e^{2mx}}}{(-m+\log n)(-2m+\log n)}+\frac{Ae^{-mx}}{-m}+A'$$; ed infine si trova

$$\int e^{-mx}dx\left(\frac{n^x:e^{2mx}}{(-m+\log n)(-2m+\log n)}+\frac{Ae^{-mx}}{-m}+A'\right)=\ldots$$

$$\int\left(\frac{n^x}{e^{3mx}}:(-m+\log n)(-2m+\log n)+\frac{Ae^{-2mx}}{-m}+A'e^{-mx}\right)dx=$$

$\frac{n^x}{e^{3mx}}:(-m+\log n)(-2m+\log n)(-3m+\log n)+\frac{Ae^{-2mx}}{2m^2}+$ $\frac{A'e^{-mx}}{-m}+A''$; se adesso si moltiplica tutta questa quantità per e^{3mx} avremo per y questa espressione

$y=n^x:(-m+\log n)(-2m+\log n)(-3m+\log n)+\frac{Ae^{mx}}{2m^2}+$ $\frac{A'e^{2mx}}{-m}+A''e^{3mx}$; e considerando contenuti entro le costanti arbitrarie A, A' i divisori $2m^2, -m$ s'avrà

$y=n^x:(-m+\log n)(-2m+\log n)(-3m+\log n)+Ae^{mx}+$ $A'e^{2mx}+A''e^{3mx}$; e questo è l'integrale completo della proposta equazione.

§. 6. l'espressione dell'integrale completo fin ora assegnato dai Geometri per l'equazione (A) del §. 2. è

$$y=\frac{e^{\alpha x}(C+\int e^{-\alpha x}Xdx)}{m}+\frac{e^{\alpha' x}(C'+\int e^{-\alpha' x}Xdx)}{m'}+\ldots\ldots$$

$$\frac{e^{\alpha'' x}(C''+\int e^{-\alpha'' x}Xdx)}{m''}+\ldots+\frac{e^{\alpha^{(n-1)}x}(C^{(n-1)}+\int e^{-\alpha^{(n-1)}x}Xdx)}{m^{(n-1)}}$$

I valori degl' α in questa espressione di y sono i medesimi che per noi; C, C', C'', ec. $C^{(n-1)}$ sono le n costanti arbitrarie; e i valori dei divisori sono

$$m = (\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'') \ldots (\alpha - \alpha^{(n-1)}),$$

$$m' = (\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'') \ldots (\alpha' - \alpha^{(n-1)}),$$

$$m'' = (\alpha'' - \alpha)(\alpha'' - \alpha') \ldots (\alpha'' - \alpha^{(n-1)})$$

. . . .

. . . .

$$m^{(n-1)} = (\alpha^{(n-1)} - \alpha)(\alpha^{(n-1)} - \alpha') \ldots (\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)}):$$

conviene però avvertire che tale integrale è nella supposizione che il coefficiente di $\frac{d^n y}{dx^n}$ sia l' unità, cioè $p = 1$.

Ora sarà facile vedere come dalla formola da noi trovata al §. antecedente dipenda la quì citata espressione d'integrale. Mostreremo tal dipendenza in una equazione del terzo ordine, e vedremo che ciò che siamo per dire si applica ancora alle equazioni di qualunque ordine.

Nel caso adunque che l' equazione da integrarsi sia del terzo ordine (supponendo che il coefficiente di $\frac{d^3 y}{dx^3}$ sia l' unità) la nostra formola sarà

$$(a) \ldots y = e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int e^{(\alpha'' - \alpha')x} dx \int e^{-\alpha'' x} X dx,$$ e la formola data dagl' altri Geometri sarà

$$(b) \ldots y = \frac{e^{\alpha x}(C + \int e^{-\alpha x} X dx)}{(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')} + \frac{e^{\alpha' x}(C' + \int e^{-\alpha' x} X dx)}{(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'')} + \ldots$$

$\frac{e^{\alpha'' x}(C''+\int e^{-\alpha'' x} X dx)}{(\alpha''-\alpha)(\alpha''-\alpha')}$. Se l' espressione ($a$) s' integra per parti avremo

$$y=\frac{e^{\alpha' x}\int e^{(\alpha''-\alpha')x}dx\int Xe^{-\alpha'' x}dx}{\alpha'-\alpha}-\frac{e^{\alpha x}\int e^{(\alpha''-\alpha)x}dx\int Xe^{-\alpha'' x}dx}{\alpha'-\alpha}=\ldots$$

$$\frac{e^{\alpha'' x}\int e^{-\alpha'' x}Xdx}{(\alpha'-\alpha)(\alpha''-\alpha')}-\frac{e^{\alpha' x}\int e^{-\alpha' x}Xdx}{(\alpha'-\alpha)(\alpha''-\alpha')}-\frac{e^{\alpha'' x}\int e^{-\alpha'' x}Xdx}{(\alpha'-\alpha)(\alpha''-\alpha)}+\ldots\ldots$$

$\frac{e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}Xdx}{(\alpha'-\alpha)(\alpha''-\alpha)}$, ovvero

$$y=\left\{\frac{1}{(\alpha'-\alpha)(\alpha''-\alpha')}-\frac{1}{(\alpha'-\alpha)(\alpha''-\alpha)}\right\}e^{\alpha'' x}\int e^{-\alpha'' x}Xdx+\ldots$$

$$\frac{e^{\alpha' x}\int e^{-\alpha' x}Xdx}{(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\alpha'')}+\frac{e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}Xdx}{(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')};$$

Se adesso a ciascuno dei segni d' integrazione vi si aggiunge la costante arbitraria, s' avrà

$$y=\frac{e^{\alpha'' x}(C''+\int e^{-\alpha'' x}Xdx)}{(\alpha''-\alpha')(\alpha''-\alpha)}+\frac{e^{\alpha' x}(C'+\int e^{-\alpha' x}Xdx)}{(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\alpha'')}+\ldots\ldots$$

$\frac{e^{\alpha x}(C+\int e^{-\alpha x}Xdx)}{(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')}$; e questa è precisamente l' espressione (b). Si seguirebbe il medesimo andamento per l' equazioni degl' ordini superiori.

§. 7. Se si ricercasse l' integrale completo della proposta (A) del §. 2. nel caso che $X=0$, s' avrà

$\int \frac{X}{\alpha^{(n-1)x}}dx=\int 0 . dx=A^{(n-1)}$ costante arbitraria, e l' espressione

sione completa di y sarebbe

$$y=\frac{1}{p}e^{\alpha x}\int e^{(\alpha'-\alpha)x}dx\int e^{(\alpha''-\alpha')x}dx\ldots\int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}dx.A^{(n-1)};$$

Ora avvertendo che in generale $\int e^{mx}dx=\frac{e^{mx}}{m}+$ C costante, quando m è una costante, s' avrà

$$\int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}dx.A^{(n-1)}=\frac{e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}}{\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)}}A^{(n-1)}+A^{(n-2)};$$

essendo $A^{(n-2)}$ una nuova costante arbitraria; e se si considera il divisore $\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)}$ come contenuto entro la costante arbitraria $A^{(n-1)}$, s' avrà il superiore integrale eguale ad $A^{(n-1)}.e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}+A^{(n-2)}$. Così s' avrà

$$\int e^{(\alpha^{(n-2)}-\alpha^{(n-3)})x}dx\int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}dx.A^{(n-1)}=\ldots\ldots;$$

$$\int e^{(\alpha^{(n-2)}-\alpha^{(n-3)})x}dx(A^{(n-1)}.e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}+A^{(n-2)})=$$

$$\int A^{(n-1)}.e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-3)})x}dx+\int A^{(n-2)}.e^{(\alpha^{(n-2)}-\alpha^{(n-3)})x}dx=$$

$$A^{(n-1)}.e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-3)})x}+A^{(n-2)}.e^{(\alpha^{(n-2)}-\alpha^{(n-3)})x}+\ldots;$$

$A^{(n-3)}$, considerando sempre contenuti entro le costan-

ti arbitrarie $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$, i divisori che portano le integrazioni. Col medesimo metodo s' avrà

$$\int e^{(\alpha'-\alpha)x}dx\int e^{(\alpha''-\alpha')x}dx\ldots\int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}.A^{(n-1)}\,dx =$$

$$A^{(n-1)}e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha)x}+A^{(n-2)}.e^{(\alpha^{(n-2)}-\alpha)x}+\ldots+$$

$A'e^{(\alpha'-\alpha)x}+A$; la quale espressione moltiplicata per $\frac{1}{p}e^{\alpha x}$, e considerato $\frac{1}{p}$ come contenuto entro le costanti arbitrarie, ci darà

$$y=A.e^{\alpha x}+A'.e^{\alpha' x}+A''.e^{\alpha'' x}+\ldots+A^{(n-1)}.e^{\alpha^{(n-1)}x};$$ le lettere A, A', ec. $A^{(n-1)}$ sono le n costanti arbitrarie che hanno portato le n integrazioni.

Tale espressione per y è la conosciuta formola dell' integrale completo, che i Geometri hanno fin ora dato per il caso di $X=0$.

§. 8. Se alcune delle radici sono eguali le nostre formole, a differenza di quelle già conosciute rimangono sempre complete. In fatti siano per esempio le radici eguali α, α', α'' s' avrà allora $\alpha'-\alpha=0$, $\alpha''-\alpha'=0$, e la formola del §. 5. diverrà

$$y=\frac{1}{p}e^{\alpha x}\int dx\int dx\int e^{(\alpha'''-\alpha)x}dx\int\ldots\int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}dx\int\frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}}dx$$

e quella del §. antecedente per il caso di $X=0$, è

$$y=\frac{1}{p}e^{\alpha x}\int dx\int dx\int e^{(\alpha'''-\alpha)x}dx\ldots\int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}.A^{(n-1)}dx;$$

ed è evidente che sussistendo ancora in questo caso n segni integrali, le n integrazioni porteranno sempre un numero n di costanti arbitrarie.

Se le radici delle equazioni fossero tutte eguali, le nostre formole diverrebbero

$$y=\frac{1}{p}e^{\alpha x}\int dx\int dx\int dx\int\ldots\int dx\int\frac{X}{e^{\alpha x}}dx$$

$y=\frac{1}{p}e^{\alpha x}\int dx\int dx\int dx\int\ldots\int A^{(n-1)}dx$ le quali rappresentano sempre gl' integrali completi, essendo n di numero le integrazioni indicate.

Se l' equazione da integrarsi non avesse nel primo membro che il termine $\frac{d^ny}{dx^n}$, se fosse cioè $\frac{d^ny}{dx^n}=X$; l' equazione da risolversi sarebbe $\alpha^n=0$, dalla quale si ricava $\alpha=\alpha'=\alpha''=$ ec. $=\alpha^{(n-1)}=0$ e perciò l' espressione dell' integrale sarebbe

$y=\int dx\int dx\int dx\int\ldots\int Xdx$, essendo i segni integrali di numero n.

Questa espressione dell' integrale si trova ancora con le successive integrazioni del primo membro della stessa equazione $\frac{d^ny}{dx^n}=X$; così si ha

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int Xdx,\ \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int dx\int Xdx,\ \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}=\int dx\int dx\int Xdx,\ \text{ec.}$$

si giunge in fine al medesimo risultato che ci ha dato il nostro metodo.

Se l' equazione lineare da integrarsi cominciasse dalle differenze n^{esime}, se fosse cioè

$$g\frac{d^m y}{dx^m} + h\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + \ldots + p\frac{d^n y}{dx^n} = X:$$ m è minore di n,

l' equazione da risolversi sarebbe

$g\alpha^m + h\alpha^{m+1} + \ldots + p\alpha^n = 0$, la quale ha m radici $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots \alpha^{(m-1)}$ eguali a zero; l' integrale allora dell' equazione dato dalla nostra formola si troverebbe

$$y = \frac{1}{p}\int dx \int dx \int \ldots \int e^{\alpha^{(m)}x} dx \int e^{(\alpha^{(m+1)}-\alpha^{(m)})x} dx \int \ldots$$

$$\ldots \int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}} dx:$$ I segni integrali, che precedono

$\int e^{\alpha^{(m)}x} dx$ sono $m-1$ di numero, e tutti insieme sono di numero n; così le costanti che questi introducono sono sempre n di numero.

Ma per vedere più chiaramente come gl' integrali si mantengano completi nel caso delle radici eguali, supponghiamo che le radici eguali siano tre $\alpha = \alpha' = \alpha''$ come al principio di questo §.

Sia la porzione dell' integrale,

$$\int e^{(\alpha'''-\alpha)x} dx \int \ldots \int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x} dx \int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}} dx = Z_x + A'',$$

essendo Z_x una funzione di x, e A'' una costante arbitraria, avremo allora

$y = \frac{1}{p} e^{ax} \int dx \int dx (Z_x + A'')$: ora si ha

$\int dx (Z_x + A'') = Z'_x + A''x + A'$ onde

$y = \frac{1}{p} e^{ax} \int dx (Z'_x + A''x + A')$; ed eseguendo questa integrazione, s'avrà

$y = \frac{1}{p} e^{ax} (Z''_x + A''x^2 + A'x + A)$, ovvero

$y = \frac{1}{p} e^{ax} Z''_x + A''x^2 e^{ax} + A'x e^{ax} + A e^{ax}$.

Per Z'_x si è rappresentato l'integrale $\int dx . Z_x$; per Z''_x l'integrale $\int dx . Z'_x$; la quantità $\frac{1}{p}$ e i coefficienti, che portano l'integrazioni si considerano contenuti entro le costanti arbitrarie.

Ora siccome Z''_x contiene le costanti arbitrarie le quali sono comprese in Z_x, che sono $n-3$ di numero, il valore di y ne conterrà perciò un numero n e resterà completo.

Quando X essendo nullo, alcune delle radici sono eguali, per esempio, $a = a' = a''$, si ha (poichè allora è

$$Z_x = A^{(n-1)} . e^{(a^{(n-1)} - a)x} + \ldots + A''' e^{(a''' - a)x} + A'')$$

per y

$$y = \frac{1}{p} e^{ax} \int dx \int dx \{ A^{(n-1)} . e^{(a^{(n-1)} - a)x} + \ldots \ldots + A''' \times$$

$$e^{(\alpha'''-\alpha)x} + A'' \Big\} = Ae^{\alpha x} + A'xe^{\alpha x} + A''x^2e^{\alpha'' x} + A'''e^{\alpha''' x} + \ldots +$$

$A^{(n-1)} e^{(\alpha^{(n-1)}x}$, che è sempre l' integrale completo della proposta: Così la formola

$$y = Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x} + A'''e^{\alpha''' x} + \ldots + A^{(n-1)} e^{\alpha^{(n-1)} x},$$

nella quale i primi tre termini si riducono ad un solo ($A +$ $A' + A''$) $e^{\alpha x}$ nel caso di tre radici eguali $\alpha, \alpha', \alpha''$, conterrà invece di quei tre termini, i tre seguenti

$Ae^{\alpha x} + A'x.e^{\alpha x} + A''x^2.e^{\alpha x}$, che non potendosi ridurre più in uno solo, faranno sì che la formola abbia sempre un numero n di costanti arbitrarie diverse, e sia perciò completa; e se in generale il numero delle radici eguali fosse m l' integrale completo invece dei termini

$$A.e^{\alpha x} + A'.e^{\alpha' x} + \ldots + A^{(m-1)}.e^{\alpha^{(m+1)} x}$$ conterrebbe i termini

$$A.e^{\alpha x} + A'.e^{\alpha x}.x + A''.e^{\alpha x}.x^2 + \ldots + A^{(m-1)} e^{\alpha x} x^{m-1}$$

Così le nostre formole esprimono sempre gl' integrali completi.

Tutto passa come nelle equazioni a differenze finite.

§. 9. Al contrario le formole che hanno date per queste integrazioni i Geometri, e che abbiamo sopra riportate, hanno il considerabile difetto di divenire incomplete nel caso delle radici eguali. La formola per il caso in cui X non è nullo ha di più l' inconveniente di rendere infiniti alcuni dei suoi termini. Se si suppone infatti che tre radici α, α', α'' siano eguali, i primi tre termini divengono

$$\frac{e^{\alpha x}(C+\int e^{-\alpha x}Xdx)}{m}+\frac{e^{\alpha' x}(C'+\int e^{-\alpha' x}Xdx)}{m'}+\ldots\ldots\ldots$$

$\frac{e^{\alpha'' x}(C''+\int e^{-\alpha'' x}Xdx)}{m''}$ i quali hanno i loro numeratori che sono i medesimi, e i denominatori m, m', m'', che sono nulli, poichè contengono i fattori $\alpha-\alpha', \alpha'-\alpha'', \alpha''-\alpha$, che sono zero; questi termini perciò diverranno infiniti.

Nel caso di X nullo, quando si hanno tre radici eguali, i primi tre termini $Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha' x}+A''e^{\alpha'' x}$ riducendosi ad uno solo $(A+A'+A'')e^{\alpha x}$ ovvero $Ce^{\alpha x}$, (considerando rappresentata da una sola costante C la somma delle tre costanti arbitrarie A, A', A'') l'integrale perciò rimane incompleto, mancandoli due costanti arbitrarie.

A tutti questi inconvenienti hanno i Geometri supplito adoprando il metodo del Sig. d'Alambert, di cui noi abbiamo mostrato l'inesattezza dei suoi principj nel Capitolo antecedente al §. 20. e segg., parlando della maniera di completare gl'integrali delle equazioni a differenze finite. E perchè si veda ancora più chiaramente che le riflessioni fatte ai citati §§. contro quel metodo, vagliono ancora per il caso presente, noi lo adopreremo per ricompletare la formola superiore, quando due sole sono le radici eguali, quando cioè $\alpha=\alpha'$.

In questo caso i primi due termini $Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha' x}$ si riducono ad un solo $Ce^{\alpha x}$. Se però si fa $\alpha'=\alpha+\omega$ essendo ω quantità piccolissima, avremo per quei due termini $Ae^{\alpha x}+A'e^{(\alpha+\omega)x}$, che saranno eguali ad

$$Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha x}.e^{\omega x}=Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha x}\left(1+\omega x+\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^3x^3}{2.3}+\text{ec.}\right),$$

e trascurando gl' infinitamente piccoli degl' ordini superiori al primo (se le radici fossero tre si trascurerebbero gl' infinitamente piccoli degl' ordini superiori al secondo ordine e così di seguito come nelle equazioni a differenze finite) s' avrà

$Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha x}(1+\omega x)=(A+A')e^{\alpha x}+A'\omega x.e^{\alpha x}$; e facendo $A+A'=A$, $A'\omega=A'$, s' avranno per i primi due termini dell' integrale questi $Ae^{\alpha x}+A'x.e^{\alpha x}$. Si vede adunque che tal metodo ha per base i medesimi principj che abbiamo esaminati al luogo citato; perciò noi lo rigettiamo senza più parlarne.

§. 10. Ma le formole date fin' ora dai Geometri possono di nuovo ridursi ad essere complete senza bisogno di ricorrere in modo alcuno al metodo del Sig. d' Alambert, deducendo la correzione agl' inconvenienti che contengono da nessun principio a loro estrinseco, ma dalla natura stessa delle equazioni, di cui esse esprimono gl' integrali: Questo è ciò che andiamo a vedere.

Nel caso di X nullo l' integrale dell' equazione

$$a+b\frac{dy}{dx}+c\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots+p\frac{d^ny}{dx^n}=0 \text{ è}$$

$y=Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha' x}+A''e^{\alpha'' x}+\ldots+A^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}x}$, il quale è la somma d' un numero n d' integrali particolari diversi $Ae^{\alpha x}$, $A'e^{\alpha' x}$, ec. $A^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}x}$, ciascuno dei quali contiene una costante arbitraria.

Quando alcune radici α, α', ec. $\alpha^{(n-1)}$ sono eguali, si hanno

alcuni

alcuni di questi integrali particolari eguali, e perciò scemando il numero degl' integrali particolari diversi fra loro, la formola contenendo un minor numero di costanti arbitrarie rimane imcompleta.

Siccome α, α', ec. $\alpha^{(n-1)}$ sono le radici dell' equazione

$$(1) \ldots a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0,$$ è noto che le radici dell' equazione

$$(1)' \ldots b + 2c\alpha + 3e\alpha^2 + \ldots + np\alpha^{n-1} = 0,$$ (la quale nasce dal moltiplicare ciascun termine dell' equazione (1) per l' esponente che vi ha l' α, e dividere quindi per α) avranno per limiti le quantità $\alpha, \alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}$: Dunque se l' equazione (1) ha due radici eguali α, α', l' equazione (1)$'$ avrà una radice eguale ad α; e perciò questa radice soddisfarà nel medesimo tempo alle equazioni (1), (1)$'$: se ora l' equazione (1) si moltiplica per x e vi si aggiunga l' equazione (1)$'$ avremo questa equazione (1) x + (1)$'$ = 0, cioè

$$(2) \ldots ax + b(\alpha x + 1) + c(\alpha^2 x + 2\alpha) + e(\alpha^3 x + 3\alpha^2) \ldots + p(\alpha^n x + n\alpha^{n-1}) = 0;$$ ed una delle due radici eguali α, α' soddisfarà o renderà identiche nel medesimo tempo le due equazioni (1), (2).

Ora è evidente che qualunque valore di y funzione di una delle radici eguali α e di x, il quale sostituito nella proposta la trasformi nell' equazione (2), sarà un nuovo integrale particolare della proposta medesima. Se adunque si fà $y = A' x e^{\alpha x}$, essendo A$'$ una costante arbitraria, si ha

$$\frac{dy}{dx} = A'e^{\alpha x}(\alpha x + 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A'e^{\alpha x}(\alpha^2 x + 2\alpha)$$

. . . .

. . . .

$\frac{d^n y}{dx^n} = A'e^{\alpha x}(\alpha^n x + n\alpha^{n-1})$, e sostituendo questi valori nell' equazione

$ay + b\frac{dy}{dx} + \ldots\ldots + p\frac{d^n y}{dx^n} = 0$; si ha precisamente l' equazione (2); dunque sarà $y = A'xe^{\alpha x}$ un' altro integrale particolare della proposta; dunque nel caso che α sia una delle radici eguali dell' equazione (1), soddisfà all' equazione differenziale non solo $y = Ae^{\alpha x}$, ma ancora $y = A'xe^{\alpha x}$; perciò invece dei due termini $Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x}$ (i quali come abbiamo detto al §. 9. si riducono ad uno solo) si metteranno i due $Ae^{\alpha x} + A'xe^{\alpha x}$, e così l' integrale essendo sempre un aggregato di n integrali particolari diversi, sarà perciò completo.

§. 11. Nel caso che le radici eguali siano tre $\alpha = \alpha' = \alpha''$, una di queste radici soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni (1), (2) e all' equazione

$2c + 2.3e\alpha + 3.4f\alpha^2 + \ldots + n(n-1)p\alpha^{n-2} = 0$, le di cui radici hanno per limiti quelle dell' equazione (1)' e che si ricava dall' equazione (1)' come si è ricavata questa da (1): se adesso si moltiplica l' equazione (1) per x^2, l' equazione

(1)' per $2x$, e s' aggiungono a quest' ultima, avremo l' equazione

(3) . . . $ax^2 + b(\alpha x^2 + 2x) + c(\alpha^2 x^2 + 2\alpha . 2x + 2) + e(\alpha^3 x^2 + 3\alpha^2 . 2x + 2 . 3\alpha) + \ldots\ldots + p(\alpha^n x^2 + n\alpha^{n-1} . 2x + n(n-1)\alpha^{n-2}) = 0$; e una delle radici eguali soddisfarà nel medesimo tempo alle tre equazioni (1), (2), (3).

Se adesso si prende per y una tal funzione di x e di α, che sostituita nella proposta, la trasformi nell' equazione (3), questa funzione sarà un altro integrale particolare della proposta.

E' facile vedere che $y = A''e^{\alpha x} . x^2$ ha questa proprietà, poichè generalmente si trova

$\frac{d^n y}{dx^n} = A''e^{\alpha x}(\alpha^n x^2 + 2 . n\alpha^{n-1} . x + n(n-1)\alpha^{n-2})$; e sostituiti i valori di y e dei suoi differenziali nella proposta, la si riduce all' equazione (3); dunque $y = Ae^{\alpha x} . x^2$ sarà un nuovo integrale particolare della proposta: dunque nel caso di tre radici eguali ad α, questa radice darà i tre integrali particolari diversi

$y = Ae^{\alpha x}, y = A'e^{\alpha x} . x, y = A''e^{\alpha x} . x^2$; onde invece dei tre termini dell' integrale completo

$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x}$, i quali in questo caso si riducono ad uno solo, si porranno i tre seguenti

$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha x} . x + A''e^{\alpha x} . x^2$; e così l' integrale si manterrà completo.

§. 12. Col medesimo ragionamento si può provare, che se si ha un numero l di radici eguali, cioè $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots$

$\ldots = \alpha^{(l-1)}$, invece degli l termini $Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + \ldots +$

$A^{(l-1)} e^{\alpha^{(l-1)} x}$, i quali si riducono ad uno solo, si dovranno mettere i termini $Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha x}.x + A''e^{\alpha x}.x^2 + \ldots +$

$A^{(l-1)} e^{\alpha x}.x^{l-1}$; e allora l' integrale sarà sempre completato dal necessario numero di costanti arbitrarie.

§. 13. Al §. 10. abbiamo veduto che nel caso di due radici eguali $\alpha = \alpha'$, una di queste radici soddisfà nel medesimo tempo alle due equazioni (1), (1)'. Se ora si moltiplica l' equazione (1) per ϕx, e l' equazione (1)' per Ψx, essendo $\phi x, \Psi x$ due funzioni di x, sommando allora quelle due equazioni s' avrà

$$(2) \ldots a.\phi x + b(\alpha.\phi x + \Psi x) + c(\alpha^2.\phi x + 2\alpha.\Psi x) + \ldots +$$

$$p(\alpha^n.\phi x + n\alpha^{n-1}.\Psi x) = 0;$$ ed è chiaro che una delle radici eguali soddisfarà nel medesimo tempo alle equazioni (1), (2). Dunque se per y si trova una tal funzione in x ed α, che sostituita nella proposta la riduca all' equazione (2), questa sarà un nuovo integrale particolare della medesima.

Se si fa $y = Ae^{\alpha x}\phi x$, avremo

$$\frac{dy}{dx} = Ae^{\alpha x}(\alpha\phi x + \frac{d\phi x}{dx})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{\alpha x}(\alpha^2\phi x + 2\alpha\frac{d\phi x}{dx} + \frac{d^2\phi x}{dx^2})$$

ec.

Si vede adunque che acciò la proposta

$ay + b\frac{dy}{dx} + c\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + p\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ si riduca all' equazione (2) sostituendovi i valori dell' y e delle sue differenziali, conviene che sia $\frac{d\varphi x}{dx} = \Psi x$, e $\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = 0$, dalle quali due equazioni si ricava $\varphi x = Cx + C'$, $\Psi x = C'$ essendo C, C' due costanti arbitrarie; onde s' avrà

$y = Ae^{ax}(Cx + C') = A'e^{ax}.x + Ae^{ax}$. avendo mutato la forma delle costanti, cioè avendo posto A' per AC, e A per AC'; e questo valore di y sarà il nuovo integrale particolare che dovrà aggiungersi all' espressione incompleta dell' y. Si giunge anche al medesimo risultato trovato sopra.

Si potrebbe procedere così direttamente per trovare l' integrali particolari, che hanno luogo per più radici eguali; e si troverebbero a *priori* quelle istesse espressioni per l' integrali, le quali abbiamo trovate ai §§. antecedenti.

§. 14. Noi non ci tratterremo a dedurre dalla natura dell' equazione differenziale il metodo di ricompletare la formola fin ora conosciuta per il caso in cui X non è nullo; poichè la nostra dando sempre l' integrali completi per qualunque caso, può soddisfare a qualunque quesito. Sarebbe però facile mostrare, che non vi è bisogno di mai ricorrere al metodo del Sig. d' Alembert, qualunque sia la forma sotto la quale si tengono gl' integrali.

Passiamo adesso a trattare dell' integrazione dell' equazioni a coefficienti variabili.

§. 15. Se i coefficienti a, b, c, ec. p di questa equazione

(A) . . . $ay + b\frac{dy}{dx} + c\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + p\frac{d^ny}{dx^n} = X$ sono funzioni dell' x, allora per averne l' integrale si farà $y = \alpha\int z dx$, es-

sendo α e z in questo caso due funzioni della variabile x da determinarsi. Dopo questa supposizione s' avrà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\alpha}{dx}\int zdx+\alpha z$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2\alpha}{dx^2}\int zdx+2\frac{d\alpha}{dx}.z+\alpha\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3\alpha}{dx^3}\int zdx+3\frac{d^2\alpha}{dx^2}.z+3\frac{d\alpha}{dx}.\frac{dz}{dx}+\alpha\frac{d^2z}{dx^2}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n\alpha}{dx^n}\int zdx+n\frac{d^{n-1}\alpha}{dx^{n-1}}.z+\frac{n(n-1)}{2}.\frac{d^{n-2}\alpha}{dx^{n-2}}.\frac{dz}{dx}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\times$$

$\frac{d^{n-3}\alpha}{dx^{n-3}}.\frac{d^2z}{dx^2}+\ldots+\alpha\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$; e sostituendo questi valori nella equazione proposta (A) avremo

$$\left(a\alpha+b\frac{d\alpha}{dx}+c\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\ldots+p\frac{d^n\alpha}{dx^n}\right).\int zdx+\left(b\alpha+2c\frac{d\alpha}{dx}+\ldots+\right.$$

$$\left.np\frac{d^{n-1}\alpha}{dx^{n-1}}\right).z+\left(c\alpha+3e\frac{d\alpha}{dx}+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}p\frac{d^{n-2}\alpha}{dx^{n-2}}\right)\frac{dz}{dx}+$$

$$\left(e\alpha+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p\frac{d^{n-3}\alpha}{dx^{n-3}}\right).\frac{d^2z}{dx^2}+\ldots+p\alpha.\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=X:$$

se ora si fa eguale a zero il coefficiente della quantità $\int zdx$, s' otterrà per determinare α questa equazione

(1) . . . $a\alpha+b\frac{d\alpha}{dx}+c\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\ldots+p\frac{d^n\alpha}{dx^n}=0$; e per determi-

nare z una equazione della forma

$$(B) \ldots b'z + c'\frac{dz}{dx} + e'\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots + p'\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = X.$$

L' equazione (1) che determina α non è altro che la proposta nel caso che X sia nullo; e quella (B) che determina z è una equazione dell' ordine $n-1$, ancora essa a coefficienti variabili. Nella medesima maniera si faccia $z = \alpha' \int z' dx$, essendo ancora α', z' due funzioni di x da determinarsi, e operando come per la proposta s' avrà per determinare α' l' equazione

$$(2) \ldots b'\alpha' + c'\frac{d\alpha'}{dx} + e'\frac{d^2\alpha'}{dx^2} + \ldots + p'\frac{d^{n-1}\alpha'}{dx^{n-1}} = 0;$$ e per determinare z' una equazione dell' ordine $n-2$ di questa forma

$$c''z' + e''\frac{dz'}{dx} + \ldots + p''\frac{d^{n-2}z'}{dx^{n-2}} = X.$$

Se il valore di z si sostituisce in $y = \alpha \int z dx$, s' avrà fin ora $y = \alpha \int \alpha' dx \int z' dx$.

Parimente se si fa $z' = \alpha'' \int z'' dx$,

$z'' = \alpha''' \int z''' dx$, ec. s' avrà

$y = \alpha \int \alpha' dx \int \alpha'' dx \int z'' dx$,

$y = \alpha \int \alpha' dx \int \alpha'' dx \int \alpha''' dx \int z''' dx$

ec.

§. 16. Seguendo il medesimo andamento che abbiamo tenuto per l' equazioni a differenze finite, si vede che giungeremo infine a questa espressione di y

$y = \alpha \int \alpha' dx \int \alpha'' dx \int \alpha''' dx \ \ldots \int \alpha^{(n-1)} dx \int z^{(n-1)} dx$ che sarà l'integrale completo della proposta.

Così l'integrale completo di una equazione lineare (A) dell'ordine n a coefficienti variabili dipende dalla conoscenza delle funzioni $\alpha, \alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}, z^{(n-1)}$, le quali si ottengono per mezzo dell'integrazione di queste n equazioni

$$(1) \ldots a\alpha + b\frac{d\alpha}{dx} + c\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \ldots + p\frac{d^n\alpha}{dx^n} = 0$$

$$(2) \ldots b'\alpha' + c'\frac{d\alpha'}{dx} + e'\frac{d^2\alpha'}{dx^2} + \ldots + p'\frac{d^{n-1}\alpha'}{dx^{n-1}} = 0$$

$$(3) \ldots c''\alpha'' + e''\frac{d\alpha''}{dx} + \ldots\ldots\ldots + p''\frac{d^{n-2}\alpha''}{dx^{n-2}} = 0$$

. . . .

$$(n) \ldots\ldots\ q^{(n-1)}\alpha^{(n-1)} + p^{(n-1)}.\frac{d\alpha^{(n-1)}}{dx} = 0,$$ e dalla risoluzione dell'equazione finita

$$(n+1) \ \ldots \ p^{(n)} z^{(n-1)} = X.$$

I cofficienti b', c', ec. p' sono conosciuti, poichè dipendono dai coefficienti della proposta e dalla quantità α. Egualmente i coefficienti c'', e'', ec. p'' dipendono da b', c', ec. p' e da α' e così di seguito.

Ora è facile mostrare che trovati n integrali particolari dell'equazione (1), si hanno sul campo e senza alcuna operazione che dipenda dalle equazioni (2), (3), ec. gl' integrali particolari di quest' altre equazioni. Infatti se all' equazione (2)

vi si aggiunge l'equazione (1) moltiplicata per $\int \alpha' dx$, s' avrà (avendo sostituito per b', c', ec. p' i di loro valori) la seguente equazione

$$\left(a\alpha + b\frac{d\alpha}{dx} + c\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \ldots + p\frac{d^n\alpha}{dx^n}\right)\int \alpha' dx + \left(b\alpha + 2c\frac{d\alpha}{dx} + \ldots + np\frac{d^{n-1}\alpha}{dx^{n-1}}\right)\alpha' + \left(c\alpha + 3e\frac{d\alpha}{dx} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{2}p\frac{d^{n-2}\alpha}{dx^{n-2}}\right)\times$$

$$\frac{d\alpha'}{dx} + \ldots + p\alpha . \frac{d^{n-1}\alpha'}{dx^{n-1}} = 0,$$ la quale si riduce evidentemente a questa

$$(2)' \ldots\ldots a\alpha\int \alpha' dx + b\frac{d.\alpha\int \alpha' dx}{dx} + c\frac{d^2.\alpha\int \alpha' dx}{dx^2} + e\frac{d^3.\alpha\int \alpha' dx}{dx^3}$$

$$+ \ldots + p\frac{d^n.\alpha\int \alpha' dx}{dx^n} = 0.$$

Ora questa equazione $(2)'$ avendo i medesimi coefficienti dell'equazione (1), è evidente che $\alpha\int \alpha' dx$ deve essere un integrale particolare della medesima, il quale se noi indichiamo per $\alpha 1$, avremo $\alpha\int \alpha' dx = \alpha 1$, onde $\int \alpha' dx = \frac{\alpha 1}{\alpha}$, da cui si ricava $\alpha' = \frac{d(\alpha 1 : \alpha)}{dx}$; cioè un integrale particolare α' dell' equazione (2), è eguale alla differenziale del quoziente di due integrali particolari dell' equazione (1).

Se adunque indichiamo per $\alpha, \alpha 1, \alpha 2 \ldots \alpha(n-1)$ gli n integrali particolari dell'equazione (1); e per $\alpha', \alpha' 1, \alpha' 2, \ldots \alpha'(n-2)$ gli $n-1$ integrali dell' equazione (2), avremo

$$\alpha' = \frac{d(\alpha 1 : \alpha)}{dx},\ \alpha' 1 = \frac{d(\alpha 2 : \alpha)}{dx},\ \alpha' 2 = \frac{d(\alpha 3 : \alpha)}{dx}, \ldots \alpha'(n-2) = \frac{d(\alpha(n-1) : \alpha)}{dx};$$ e siccome l' equazione (3), è rapporto

all' equazione (2) ciò che questa qui è rapporto all' equazione (1); perciò dagl' integrali particolari dell' equazione (2) prendendo le differenze dei loro quozienti $\frac{\alpha'1}{\alpha'}, \frac{\alpha'2}{\alpha'}, \ldots \frac{\alpha'(n-2)}{\alpha'}$, si troveranno nel momento quegli dell' equazione (3), e saranno $\frac{1}{dx}.d(\alpha'1:\alpha'), \frac{1}{dx}.d(\alpha'2:\alpha')$, ec. cioè sostituendovi i valori di $\alpha'1, \alpha'2$, ec.

$$\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d(\alpha2:\alpha):\frac{1}{dx}d(\alpha1:\alpha)\right), \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d(\alpha3:\alpha):\frac{1}{dx}d(\alpha1:\alpha)\right),$$

ec. ec.; e così di seguito per le altre equazioni. Dunque si potrà sempre avere l' integrale completo della proposta, quando si hanno un numero n d' integrali particolari dell' equazione (1), cioè che alla proposta medesima soddisfacciano nel caso di $X=0$; e la forma di questo integrale sarà simile a quella ritrovata per l' equazioni a coefficienti costanti.

§. 17. Serviranno anzi un numero $n-1$ soltanto d' integrali particolari della proposta nel caso di $X=0$, poichè non conoscendosi un integrale particolare dell' equazione (1), ne resterà in conseguenza inconosciuto uno nell' equazione (2), uno nella (3), uno nella (4), ec. ed è chiaro che dell' ultima equazione (n) non si conoscerà l' integrale per mezzo di quelli dell' equazione (1); ora quest' ultima equazione (n) essendo del primo ordine, potrà perciò sempre integrarsi; onde ancora nel caso che si conoscano solamente $n-1$ integrali della proposta nel suddetto caso, potendo soddisfare a tutte quelle equazioni (1), (2), (3), . . (n), si potrà avere l' integrale completo della proposta stessa. Questo Teorema è dovuto al Sig. La-Grange.

§. 18. Sia da integrarsi l' equazione del primo ordine.

$-ay+\frac{dy}{dx}=X$, nella quale a è una funzione qualunque di x.

Facendo $y=\alpha\int z dx$, avremo per determinare α l' equazione

$-a\alpha+\frac{d\alpha}{dx}=0$, da cui si ricava $\log\alpha=\int adx$, onde $\alpha=e^{\int adx}$; e per determinare z si ha l'equazione $\alpha z=X$, cioè $z=e^{-\int adx}\times X$; onde sostituendo tali valori nell'espressione dell'y s'avrà

$$y=e^{\int adx}\int e^{-\int adx}.\, Xdx, \text{ ovvero}$$

$$y=e^{\int adx}(A+\int e^{-\int adx}.\, Xdx)$$: è rappresentata da A la costante arbitraria che porta il segno integrale.

§. 19. Passiamo adesso ad integrare l'equazione lineare seguente a coefficienti variabili di una determinata forma

$$(A) \ldots a'y+b'(p+qx).\frac{dy}{dx}+c'(p+qx)^2.\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots\ldots+ p'(p+qx)^n.\frac{d^ny}{dx^n}=X,$$ nella quale a', b', c', ec. p', p, q sono quantità costanti. Tale equazione è stata integrata completamente per la prima volta dal Sig. Euler.

Si faccia $y=\alpha\int zdx$, come si è detto al §. 15., ed avremo per determinare α l'equazione

$$(1) \ldots a'\alpha+b'(p+qx).\frac{d\alpha}{dx}+c'(p+qx)^2.\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\ldots\ldots+ p'(p+qx)^n.\frac{d^n\alpha}{dx^n}=0.$$

Ora è chiaro che se si fà

$\alpha=(p+qx)^m$, essendo m una costante da determinarsi, s'avrà

$$\frac{d\alpha}{dx}=mq(p+qx)^{m-1}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}=m(m-1)q^2(p+qx)^{m-2}$$

$$\frac{d^3\alpha}{dx^3}=m(m-1)(m-2)q^3.(p+qx)^{m-3}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d^n\alpha}{dx^n}=m(m-1)(m-2)\ldots m-(n-1).q^n(p+qx)^{m-n}.$$

Per determinare poi la funzione z s' avrà (§. 15.)

$$(B)\ldots\left(b'(p+qx)\alpha+2c(p+qx)^2\frac{d\alpha}{dx}+\ldots+np'(p+qx)^n.\frac{d^{n-1}\alpha}{dx^{n-1}}\right)z$$

$$+\left(c'(p+qx)^2\alpha+3e'(p+qx)^3.\frac{d\alpha}{dx}+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}p'(p+qx)^n.\frac{d^{n-2}\alpha}{dx^{n-2}}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$+\left(e'(p+qx)^3\alpha+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p'(p+qx)^n.\frac{d^{n-3}\alpha}{dx^{n-3}}\right)\frac{d^2z}{dx^2}$$

+ . . . .

+ . . . .

$$+p'(p+qx)^n\alpha.\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=X$$

Sostituendo adesso nelle due equazioni (1), (B) i valori di α, s' avrà per determinare m questa equazione algebraica del grado n

$$(1)'\ldots a'+b'mq+c'm(m-1)q^2+e'm(m-1)(m-2)q^3+\ldots+$$
$$p'm(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)).q^n=0;$$ e per determinare z s' avrà quest' altra equazione dell' ordine $n-1$ a coefficienti variabili simili a quelli della proposta

$(b' + 2c'.mq + 3e'.m(m-1)q^2 + 4f'.m(m-1)(m-2)q^3 + \ldots +$

$np'.m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-2))q^{n-1})z + (p+qx)$

$(c' + 3e'.qm + 2.3.f'.m(m-1)q^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}p' \times$

$m(m-1)\ldots(m-(n-3))q^{n-2})\frac{dz}{dx} + (p+qx)^2 (e' +$

$4f'.mq + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p'.m(m-1)\ldots(m-(n-4))q^{n-3})\frac{d^2z}{dx^2}$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ (p+qx)^{n-2}(h' + np'.mq)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + (p+qx)^{n-1}.p' \times$

$\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = \frac{X}{(p+qx)^{m+1}}$; h' rappresenta quì il penultimo coefficiente dell' equazione propostta. L' equazione adunque da cui è dato z sarà una equazione di questa forma

$(B)' \ldots b''z + c''(p+qx)\frac{dz}{dx} + e''(p+qx)^2\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots\ldots +$

$p''(p+qx)^{n-1}.\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = \frac{X}{(p+qx)^{m+1}}$, la quale è dell' ordine $n-1$.

Se si fà $z = (p+qx)^{m1}\int z'dx$, avremo, operando per l' equazione $(B)'$ come per la proposta, per determinare l' esponente costante $m1$, l' equazione algebraica del grado $n-1$.

$(2)\ldots b''+c''m1.q+c''m1(m1-1)q^2+\ldots+p''.m1(m1-1)\ldots$

$(m1-(n-1))q^{n-1}=0$; e per determinare z', una equazione lineare di questa forma

$$(C)\ldots c'''z'+e'''(p+qx)\frac{dz'}{dx}+\ldots+p'''(p+qx)^{n-2}\times$$

$$\frac{d^{n-2}z'}{dx^{n-2}}=\frac{X}{(p+qx)^{m+1}(p+qx)^{m1+1}};$$ e perciò l' integrazione dell' equazione (B) dipenderà dalla risoluzione dell' equazione (2), e dall' integrazione dell' equazione (C): s' avrà adunque fin ora

$$y=(p+qx)^m\int(p+qx)^{m1}dx\int z'dx.$$

Continuando l' istesso andamento, cioè facendo $z'=(p+qx)^{m2}\int z''dx$, s' avrà

$y=(p+qx)^m\int(p+qx)^{m1}dx\int(p+qx)^{m2}dx\int z''dx$, e facilmente si vedrà che l' integrazione dell' equazione (C) si farà dipendere dalla risoluzione di una equazione algebraica (3) del grado $n-2$, e dall' integrazione di una equazione lineare (D) dell' ordine $n-3$; (le equazioni (3), (D) saranno rapporto all' equazioni (2), (C), ciò che queste sono rapporto all' equazioni (1), (B)). Così di seguito.

§. 20. Prima di passare oltre trattenghiamoci ad esaminare il valore di $m1$. L' equazione (2) moltiplicata per $q(m1+1)$, e sommata con l' equazione (1) da l' equazione

$(2)q(m1+1)+(1)=0$, che è resa identica dai valori di m e di $m1$ ricavati dall' equazioni (1), (2).
Se per (1), (2) vi si sostituiscono in quella equazione le equivalenti espressioni, s' avrà

$$a' + b' mq + c' m(m-1) q^2 + e' m(m-1)(m-2) q^3 + \ldots\ldots +$$
$$p' m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)) q^n + (b' q + 2mq^2 c' +$$
$$3.m(m-1) q^3 e' + \ldots + np'.m(m-1)\ldots(m-(n-2)) q^n) \times$$
$$(m1+1) + (c' q^2 + 3e' mq^3 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} p'.m(m-1)\ldots$$
$$(m-(n-3)) q^n)(m1+1) m1 + (e' q^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} p' \times$$
$$m(m-1)\ldots(m-(n-4)) q^n)(m1+1) m1.(m1-1) +$$
$$(\ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p'.m(m-1)\ldots\ldots$$
$$(m-(n-5)) q^n)(m1+1).m1.(m1-1)(m1-2) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ p'.q^n (m1+1) m1 (m1-1)(m1-2)\ldots(m1-(n-2)) = 0.$$

Ora è facile vedere che questa equazione è l'equazione (1) quando in essa si pone $m + m1 + 1$ invece di m; dunque si conclude che $m + m1 + 1'$ dovrà essere un altra radice dell'equazione (1); onde se m' è quest' altra radice, s'avrà $m + m1 + 1 = m'$, e perciò $m1 = m' - m - 1$: così la forma dell'integrale fino alla seconda sostituzione sarà.

$$y = (p+qx)^m \int (p+qx)^{m'-m-1} dx \int z' dx.$$

Ragionando adesso come si è fatto ai §§. 2. e segg., si vede che s'avrà $m2 = m'' - m' - 1$, così $m3 = m''' - m'' - 1$, ec. essendo m, m', m'', m''', ec. $m^{(n-1)}$ le n radici dell'equazione (1): perciò l'integrale della proposta (A) che è rappresentato da

$$y = (p+qx)^m \int (p+qx)^{m1} dx \int (p+qx)^{m2} dx \int \ldots\ldots\ldots$$
$$\int (p+qx)^{m(n-1)} dx \int z^{(n-1)} dx,$$ verrà così espresso

$$y=(p+qx)^{m}\int(p+qx)^{m'-m-1}dx\int(p+qx)^{m''-m'-1}dx\ldots$$

$\int(p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1}dx\int z^{(n-1)}dx$; il valore poi di $z^{(n-1)}$ è facile vedere che sarà

$$z^{(n-1)}=\frac{X}{p'(p+qx)^{m+1}(p+qx)^{m1+1}(p+qx)^{m2+1}\ldots(p+qx)^{m(n-1)+1}}$$

ovvero

$$z^{(n-1)}=\frac{X}{p'(p+qx)^{m+m1+m2+m3+\ldots+m(n-1)+n}};$$ nella quale espressione sostituendo i valori trovati per m, $m1$, $m2$, ec. s' avrà

$$z^{(n-1)}=\frac{X}{p'(p+qx)^{m^{(n-1)}+1}}.$$ L' espressione adunque dell' integrale sarà

$$y=(p+qx)^{m}\int(p+qx)^{m'-m-1}dx\int(p+qx)^{m''-m'-1}dx\int\ldots$$

$$\int(p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1}dx\int\frac{X}{p'(p+qx)^{m^{(n-1)}+1}}.$$ Questa formola contenendo un numero n di segni integrali esprimerà l' integrale completo, qualunque siano le radici m, m', m'', ec. eguali o diseguali fra loro; imperocchè questi segni integrali introdurranno sempre un numero n di costanti arbitrarie.

§. 21. Se si fa $X=0$ la nostra formola diviene

$y=$

$$y=(p+qx)^m\int(p+qx)^{m'-m-1}dx\int(p+qx)^{m''-m'-1}dx\int\ldots$$

$\int(p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1}dx\int odx$; ma $\int odx=$ A costante, dunque

$$y=\mathrm{A}(p+qx)^m\int(p+qx)^{m'-m-1}dx\int\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\int(p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1}dx$ espressione sempre completa.

Se si facessero le successive integrazioni; non avendo riguardo ai coefficienti costanti che esse portano considerandoli contenuti entro le costanti arbitrarie, s' avrebbe l' integrale completo della proposta così espresso

$$y=\mathrm{A}(p+qx)^m+\mathrm{A}'(p+qx)^{m'}+\mathrm{A}''(p+qx)^{m''}+\ldots+$$

$\mathrm{A}^{(n-1)}(p+qx)^{m^{(n-1)}}$, A, A′, A″, ec. $\mathrm{A}^{(n-1)}$ saranno le n costanti arbitrarie.

La superiore formola è quella che hanno data i Geometri per questo caso, ed ha ancora essa il difetto di divenire incompleta quando le radici sono eguali.

E' facile dalla formola del §. antecedente, integrandola per parti come al §. 7; dedurre la formola che hanno dato i Geometri per l' integrale completo nel caso che X non sia nullo; tale formola però quando alcune delle radici m, m', m'', ec. sono eguali ha i medesimi inconvenienti di quella che noi abbiamo riportata al §. 9., diviene cioè incompleta; difetto di cui non risentono le nostre formole, le quali esprimono sempre gl' integrali completi qualunque siano le radici.

§. 22. Se l' equazione proposta al §. 19. a coefficienti variabili si paragoni con l' equazione generale del §. 15. s' avrà la forma del di lei integrale così espressa

$$y = \alpha \int \alpha' dx \int \alpha'' dx \int \ldots \int \alpha^{(n-1)} dx \int z^{(n-1)} dx;$$

ora α è uno degl' integrali particolari della proposta nel caso di X zero, integrali che ivi erano rappresentati per α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. $\alpha(n-1)$, i quali sono per il presente caso

$$A(p+qx)^{m}, A'(p+qx)^{m'}, A''(p+qx)^{m''}, \text{ec. } A^{(n-1)}(p+qx)^{m^{(n-1)}},$$

e perciò $\alpha = A(p+qx)^m$: α' è uno degl' $n-1$ integrali dell' equazione $(B)'$ del §. 19. nel caso che il secondo membro sia zero, la quale corrisponde all' equazione (2), del §. 16., ora si è veduto al medesimo §. 16. che gl' integrali dell' equazione (2), i quali noi rappresentavamo per α', $\alpha' 1$, $\alpha' 2$, ec. $\alpha'(n-2)$ erano eguali alle differenziali, divise per dx, dei quozienti che si hanno dividendo gl' $n-1$ integrali particolari $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. $\alpha(n-1)$ dell' equazione (1) per l' integrale particolare α; per il nostro caso adunque avremo per α', $\alpha' 2$, $\alpha' 3$, ec. $\alpha'(n-2)$, le seguenti espressioni

$$\frac{1}{dx} d \frac{A'(p+qx)^{m'}}{A(p+qx)^m}, \frac{1}{dx} d \frac{A''(p+qx)^{m''}}{A(p+qx)^m}, \text{ ec. } \frac{1}{dx} d \frac{A^{(n-1)}(p+qx)^{m^{(n-1)}}}{A(p+qx)^m};$$

eseguite le differenziazioni e mutata la forma delle costanti, tali espressioni diverranno

$$B(p+qx)^{m'-m-1}, B'(p+qx)^{m''-m-1}, \text{ec. } B^{(n-2)}(p+qx)^{m^{(n-1)}-m-1}$$

e perciò $\alpha' = B(p+qx)^{m'-m-1}$, $\alpha' 1 = B'(p+qx)^{m''-m-1}$, ec. α'' è un integrale particolare dell' equazione (c) del §. 20. quando il secondo membro è nullo, equazione che equivale

alla (3) del §. 16., avremo adunque per quello che si è ivi detto $\alpha'' = \frac{1}{dx} d(\alpha' 1 : \alpha')$ cioè nel nostro caso per α'' questa espressione $\frac{1}{dx} d \frac{B'(p+qx)^{m''-m-1}}{B(p+qx)^{m'-m-1}}$, e differenziando e mutando la forma delle costanti, s'avrà $\alpha'' = C(p+qx)^{m''-m'-1}$: egualmente si troverebbe

$\alpha''' = D(p+qx)^{m'''-m''-1}$, e così di seguito fino ad $\alpha^{(n-1)}$ che sarà $= P(p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1}$.

Facendo ora eguali all'unità le costanti arbitrarie A, B, C, D, ec. P di tutti questi integrali particolari, e sostituendo allora i valori di $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, ec. $\alpha^{(n-1)}$ nell'y s'avrà

$$y = (p+qx)^m \int (p+qx)^{m'-m-1} dx \int (p+qx)^{m''-m'-1} dx \int \ldots$$
$$\int (p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1} dx \int z^{(n-1)} dx;$$ e ponendo invece di $z^{(n-1)}$ il suo valore $\frac{X}{p'(p+qx)^{m^{(n-1)}-1}}$ si ha per y la medesima espressione trovata al §. 20.

§. 23. Dopo aver parlato dell'integrazione delle equazioni lineari a due sole variabili, l'ordine richiede che si passi a trattare delle equazioni lineari a piu variabili.

Si abbiano adunque a determinare per y e θ due funzioni tali di x, che soddisfacciano a questa equazione

$$\left.\begin{array}{l} ay + b\dfrac{dy}{dx} + c\dfrac{d^2y}{dx^2} + \ldots + p\dfrac{d^ny}{dx^n} \\ + a'\theta + b'\dfrac{d\theta}{dx} + c'\dfrac{d^2\theta}{dx^2} + \ldots + p'\dfrac{d^n\theta}{dx^n} \end{array}\right\} = \mathrm{X}$$ nella quale i coefficienti sono costanti, ed X funzione qualunque dell' x. Questa è una equazione lineare dell' ordine n fra le variabili x, y, θ.

E' chiaro che in virtù di questa sola equazione non è possibile determinare y e θ in funzione di x: Il problema è così indeterminato.

Si prenda adunque una equazione arbitraria

(1) . . . $a'\theta + b'\dfrac{d\theta}{dx} + c'\dfrac{d^2\theta}{dx^2} + \ldots + p'\dfrac{d^n\theta}{dx^n} = \phi x$ essendo ϕx

una funzione arbitraria della variabile x; e si supponga che questa equazione (1) abbia luogo insieme con la proposta; avremo allora per determinare y l' equazione

(2) . . . $ay + b\dfrac{dy}{dx} + c\dfrac{d^2y}{dx^2} + \ldots + p\dfrac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{X} - \phi x$.

Dall' equazione (1) si ricava il valore di θ così espresso (§. 5.)

$\theta = \dfrac{1}{p'} e^{\delta x} \int e^{(\delta' - \delta)x} dx \int e^{(\delta'' - \delta')x} dx \int \ldots \int \dfrac{\phi x}{e^{\delta^{(n-1)} x}} dx$, e dall'equazione (2) quello di y

$y = \dfrac{1}{p} e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int e^{(\alpha'' - \alpha')x} dx \int \ldots \int \dfrac{\mathrm{X} - \phi x}{e^{\alpha^{(n-1)} x}} dx$, essendo

$\delta, \delta', \delta''$, ec. $\delta^{(n-1)}$ le n radici dell' equazione

$a' + b'\delta + c'\delta^2 + e'\delta^3 + \ldots + p'\delta^n = 0$, e $\alpha, \alpha', \alpha''$, ec. $\alpha^{(n-1)}$ le n radici di quest' altra equazione

$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$. Queste espressioni trovate per y e θ contengono una funzione arbitraria ϕx; perciò possono essere diverse, secondo i diversi valori che si assumono per ϕx, e tutte soddisfaranno alla proposta: ciascuna di dette espressioni conterrà di più un numero n di costanti arbitrarie.

Se il numero delle variabili fosse ancora maggiore di tre, e si avesse una sola equazione fra esse, si supporrebbero allora esistere tante equazioni arbitrarie, come l' equazione (1), quante sono variabili meno due; e dalla risoluzione di tutte queste equazioni ne risulterebbero le espressioni complete di dette variabili y, θ, ec. in funzione di x. E' manifesto ancora che tali espressioni conterrebbero fra tutte tante funzioni arbitrarie, quante sono le equazioni che si sono supposte esistere insieme con la proposta.

Per esempio si abbiano a trovare due valori completi di y e di θ, che soddisfacciano a questa equazione

$$12\theta + 7\frac{d\theta}{dx} + \frac{d^2\theta}{dx^2} + 6y - 5\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = e^{nx}.$$

Paragonando questa equazione con la superiore avremo $a = 6$, $b = -5$, $c = p = 1$, $a' = 12$, $b' = 7$, $c' = p' = 1$, $X = e^{nx}$, e perciò

$$y = e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int \frac{e^{nx} - \phi x}{e^{\alpha' x}} dx$$

$$\theta = e^{\delta x} \int e^{(\delta' - \delta)x} dx \int \frac{\phi x}{e^{\delta' x}} dx:$$ α, α' sono le radici dell' equazione $6 - 5\alpha + \alpha^2 = 0$, e perciò $\alpha = 2$, $\alpha' = 3$: δ, δ' sono dati dall' equazione $12 + 7\delta + \delta^2 = 0$, e perciò $\delta = -3$, $\delta' = -4$. Avremo adunque

$$y = e^{2x}\int e^{x}\,dx\int \frac{e^{nx}-\phi x}{e^{3x}}\,dx,$$

$$\theta = e^{-3x}\int e^{-x}\,dx\int \frac{\phi x}{e^{-4x}}\,dx.$$

Se si suppone che $\phi x = e^{mx}$, essendo m una costante indeterminata, s' avrà

$$y = e^{2x}\int e^{x}dx\int (e^{(n-3)x} - e^{(m-3)x})\,dx$$

$\theta = e^{-3x}\int e^{-x}\,dx\int e^{(m+4)x}\,dx$; ed infine facendo le integrazioni s' otterranno i due seguenti valori per θ e y.

$$y = \frac{e^{nx}}{(n-3)(n-2)} - \frac{e^{mx}}{(m-3)(m-2)} + Ae^{3x} + A'e^{2x},$$

$\theta = \frac{e^{mx}}{(m+4)(m+3)} + Be^{-4x} + B'e^{-3x}$, i quali oltre contenere le costanti arbitrarie A, A', B, B', contengono ancora la quantità m, che rimane in essi indeterminata e dipendente dal nostro arbitrio.

§. 24. Tutto ciò che abbiamo detto a questo proposito nel Capitolo I. al §. 47. e segg., per le equazioni a differenze finite, ci dispensa dal dire altrettanto per le equazioni a differenze infinitesime di cui parliamo, potendosi ciò che a queste appartiene dedursi da quello. Così ancora nel caso presente se si facesse $y = e^{\alpha x}\int z dx$, $\theta = e^{\delta x}\int u dx$ e si seguisse il medesimo metodo per trovare i valori di y e di θ, che abbiamo tenuto al §. 2. e segg. si giungerebbe a dei risultati simili a quelli avuti per l' equazioni a differenze finite. Se i coefficienti fossero variabili, si tratterebbero le e-

quazioni a differenze infinitesime, come quelle a differenze finite a simili coefficienti. Si veda il Cap. I. al luogo citato.

§. 25. Quando fra le variabili y, θ, x si hanno due equazioni lineari, si può sempre per mezzo della differenziazione eliminare una di queste variabili, e giungere ad una equazione lineare fra due sole variabili.

Noi applicheremo il metodo a due equazioni del secondo ordine, potendo applicarsi anche all' equazioni degli ordini superiori tutto ciò che siamo per dire.

Si abbiano adunque le due equazioni

$$(1)\ \ldots\ \left.\begin{array}{l} ay + b\dfrac{dy}{dx} + c\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ + a'\theta + b'\dfrac{d\theta}{dx} + c'\dfrac{d^2\theta}{dx^2} \end{array}\right\} = X$$

$$(2)\ \ldots\ \left.\begin{array}{l} Ay + B\dfrac{dy}{dx} + C\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ + A'\theta + B'\dfrac{d\theta}{dx} + C'\dfrac{d^2\theta}{dx^2} \end{array}\right\} = X'.$$

Se il valore di $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ ricavato dalla seconda equazione, si sostituisce nella prima s' avrà una equazione di questa forma

$$(3)\ \ldots\ \left.\begin{array}{l} a1 \,.\, y + b1 \,.\, \dfrac{dy}{dx} + c1 \,.\, \dfrac{d^2y}{dx^2} \\ + a'1 \,.\, \theta + b'1 \,.\, \dfrac{d\theta}{dx} \end{array}\right\} = X1.$$

Si differenzi adesso l' equazione (3), ed avremo una equazione della forma

$$(4) \ldots a2 . y + b2 . \frac{dy}{dx} + c2 . \frac{d^2y}{dx^2} + e2 . \frac{d^3y}{dx^3} \left.\begin{matrix} \\ + a'2 . \theta + b'2 . \frac{d\theta}{dx} + c'2 . \frac{d^2\theta}{dx^2} \end{matrix}\right\} = X2.$$

In questa equazione (4) sostituendo il valore di $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ ricavato dall' equazione (2), s' avrà l' equazione della forma

$$(5) \ldots a3 . y + b3 . \frac{dy}{dx} + c3 . \frac{d^2y}{dx^2} + e3 . \frac{d^3y}{dx^3} \left.\begin{matrix} \\ + a'3 . \theta + b'3 . \frac{d\theta}{dx} \end{matrix}\right\} = X3;$$

L' equazione (5) differenziata, e sostituendo in essa il valore di $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ dato dall' equazione (2), divenga di questa forma

$$(6) \ldots a4 . y + b4 . \frac{dy}{dx} + c4 . \frac{d^2y}{dx^2} + e4 . \frac{d^3y}{dx^3} + f4 . \frac{d^4y}{dx^4} \left.\begin{matrix} \\ + a'4 . \theta + b'4 . \frac{d\theta}{dx} \end{matrix}\right\} = X4:$$

Per mezzo adesso delle equazioni (3), (5), (6) si possono eliminare le quantità θ e $\frac{d\theta}{dx}$, e s' avrà allora una equazione lineare del quarto ordine fra le due sole variabili x e y. Si ricaverà da una tale equazione il valore di y, il quale sostituito in due delle stesse equazioni (3), (5), (6), ed eliminando per mezzo di esse $\frac{d\theta}{dx}$, s' avrà il valore di θ senza nessuna integrazione.

Quando

Quando i coefficienti sono costanti l' equazione risultante ha ancora essa i coefficienti costanti; anzi in questo caso se anche X, X' sono nulli, si può fare subito $y = Ae^{\alpha x}$, $\theta = Ae^{\alpha x}.\delta$; α e δ sono costanti da determinarsi, ed A una costante la quale come vedremo, resta arbitraria. Sostituendo questi valori nelle equazioni (1), (2) s' avranno per determinare α e δ le due equazioni

$$\left.\begin{array}{l} a + b\alpha + c\alpha^2 \\ + (a' + b'\alpha + c'\alpha^2)\delta \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ + (A' + B'\alpha + C'\alpha^2)\delta \end{array}\right\} = 0;$$

dalle quali eliminando δ si ha per determinare α una equazione algebraica del quarto grado

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)(A' + B'\alpha + C'\alpha^2) = (A + B\alpha + C\alpha^2)(a' + b'\alpha + c'\alpha^2).$$

Questa equazione avrà quattro valori per α, che possiamo indicare per $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, i quali ci daranno quattro valori per δ, che indichiamo per $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$. Avremo allora per y questo valore

$y = Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x} + A'''e^{\alpha''' x}$ e per θ quest' altro

$\theta = Ae^{\alpha x}.\delta + A'e^{\alpha' x}.\delta' + A''e^{\alpha'' x}.\delta'' + A'''e^{\alpha''' x}.\delta'''$. Le lettere A, A', A'', A''' rappresentano quattro costanti arbitrarie. Si vede come potremmo fare se il numero delle equazioni fosse maggiore. Tutto passa nelle equazioni a differenze infi-

nitamente piccole, come nelle equazioni a differenze finite, di cui si è parlato all' antecedente Capitolo.

§. 26. Se alcune delle radici sono immaginarie, esse avranno sempre la forma $A + B\sqrt{-1}$; ed è noto che se vi sarà una radice di quella forma $A + B\sqrt{-1}$, ve ne sarà un altra della forma $A - B\sqrt{-1}$: così se si suppone che nell'equazione che abbiamo proposto al §. 2. per essere integrata, alcune delle radici, due per esempio, siano immaginarie, s' avrà $\alpha = A + B\sqrt{-1}$,

$\alpha' = A - B\sqrt{-1}$, e la formola del §. 5., che rappresenta l'integrale di quella equazione diverrà

$$y = \frac{1}{p} e^{(A+B\sqrt{-1})x} \int e^{-2B\sqrt{-1}.x} dx \int e^{(\alpha''-A+B\sqrt{-1})x} dx \times \dots$$

$$\int e^{(\alpha'''-\alpha'')x} dx \int \dots \int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}} dx.$$

Ora è noto che

$e^{\pm Bx\sqrt{-1}} = \cos Bx \pm \sqrt{-1}.\, sen\, Bx$; dunque sostituendo, avremo

$$y = \frac{1}{p} e^{Ax} (\cos Bx + \sqrt{-1}.\, sen\, Bx) \int (\cos 2Bx - \sqrt{-1}\, sen\, 2Bx) dx \times$$

$$\int e^{(\alpha''-A)x} (\cos Bx - \sqrt{-1}.\, sen\, Bx)\, dx \int e^{(\alpha'''-\alpha'')x} dx \int \dots$$

$$\int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}} dx.$$

Nello sviluppo di questa formola alcuni degli immaginari si distruggeranno, altri rimarranno compresi nelle costanti arbitrarie, e non compariranno che le quantità trascendenti. Noi non ci tratterremo a far vedere tutto questo, essendo facile ai nostri lettori il fare un tal calcolo da se medesimi, specie dopo avere compreso ciò che noi abbiamo detto per un simile oggetto al Capitolo I., §. 57. e segg.

§. 27. Per fare alcune applicazioni delle cose dette di sopra, si proponga da integrarsi l' equazione

$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = X$; In essa a^2 è una costante e X funzione qualunque di x.

Paragonando questa equazione con quella del §. 5., avremo $p = 1$, $n = 2$; l' equazione da risolversi sarà $a^2 + \alpha^2 = 0$, onde

$\alpha = a\sqrt{-1}$, $\alpha' = -a\sqrt{-1}$; e però sostituendo tali valori di p, α, α', in

$$y = \frac{1}{p} e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int \frac{X}{e^{\alpha' x}} dx, \text{ s' avrà}$$

$$y = e^{ax\sqrt{-1}} \int e^{-2a\sqrt{-1}.x} . dx \int e^{a\sqrt{-1}.x} . Xdx, \text{ ed integrando}$$

per parti

$$y = \frac{e^{-ax\sqrt{-1}} \int e^{ax\sqrt{-1}} . Xdx}{-2a\sqrt{-1}} - \frac{e^{ax\sqrt{-1}} . \int e^{-ax\sqrt{-1}} . Xdx}{-2a\sqrt{-1}}; \text{ ed ag-}$$

giungendo a ciascun segno sommatorio una costante arbitraria s' avrà

$$y = Ce^{-ax\sqrt{-1}} + C'e^{ax\sqrt{-1}} - \frac{e^{-ax\sqrt{-1}}}{2a\sqrt{-1}} \int e^{ax\sqrt{-1}} . Xdx + \ldots$$

$$\frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{2a\sqrt{-1}} \int e^{-a\sqrt{-1}.x} . Xdx; \text{ e mutando , secondo ciò che}$$

si è detto sopra gl' immaginari in quantità trascendenti si ha, dopo averne fatto la riduzione,

$$y=(C+C')\cos ax+(C'-C)\sqrt{-1}.\,sen\,ax-\frac{\cos ax}{a}\int sen\,ax.\,Xdx+$$

$\frac{sen\,ax}{a}\int\cos ax.\,Xdx$; e mutando la forma delle costanti si ha

$$y=A\cos ax+B\,sen\,ax-\frac{\cos ax}{a}\int sen\,ax.\,Xdx+\frac{sen\,ax}{a}\int\cos ax\times$$

Xdx; e questo è l'integrale completo della proposta.

§. 28. Mostriamo adesso l'uso dell' integrazione delle equazioni lineari nella teoria delle serie. Sia da sommarsi la serie

$$\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\text{ ec. qualunque sia } m.$$

Si moltiplichi il primo termine per x^{m+1}, il secondo per x^{m+2}, il terzo per x^{m+3}, ec. e s' eguagli allora quella serie ad y, s' avrà

$$y=\frac{x^{m+1}}{m(m+1)}+\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+\frac{x^{m+3}}{(m+2)(m+3)}+\text{ ec.}$$

Questa serie diviene la proposta facendovi $x=1$; così y rappresenterà la somma della nostra serie, quando si fa $x=1$ nel di lui valore. Si differenzi quell' equazione due volte nella supposizione di dx costante, ed avremo

$\frac{d^2y}{dx^2}=x^{m-1}+x^m+x^{m+1}+x^{m+2}+$ ec., ovvero per essere il secondo membro $=\frac{x^{m-1}}{1-x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^{m-1}}{1-x}$; e questa equazione integrata secondo la formola, che abbiamo data al §. 5.,

si dà $y=\int dx\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x}$.

Per avere adunque la somma della nostra serie dovremo fare $x=1$ dopo eseguite le integrazioni. Integrando per parti avremo

$y=x\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x}-\int\frac{x^{m}dx}{1-x}$; e facendo $x=1$ fuori del segno sommatorio, s' avrà

$$y=\int\frac{x^{m-1}dx-x^{m}dx}{1-x}=\int x^{m-1}dx$$

$y=\frac{x^m}{m}$; onde per il nostro caso

$y=\frac{1^m}{m}=\frac{1}{m}$: e perciò

$$\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\text{ec.}=\frac{1}{m}.$$

Se si fa $m=1$ si trova la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\text{ec.}=1.$$

S' abbia quest' altra serie da sommarsi

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)}+\text{ec.}$$

si faccia

$$y=\frac{x^{m+2}}{m(m+1)(m+2)}+\frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{x^{m+4}}{(m+2)(m+3)(m+4)}+\text{ec.},$$

ed è chiaro che y esprimerà la somma della serie proposta, quando si fa $x=1$ nel di lui valore.

Differenziando ora tre volte nella supposizione di dx costante avremo

$\frac{d^3y}{dx^3} = x^{m-1} + x^m + x^{m+1} +$ ec. $= \frac{x^{m-1}}{1-x}$; integrando l' equazione $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x^{m-1}}{1-x}$ s' avrà (§. 5.)

$y = \int dx \int dx \int \frac{x^{m-1}dx}{1-x}$: onde la somma della nostra serie, sarà lo sviluppo di quella formola integrale facendovi, dopo le integrazioni, $x = 1$.

Integrando per parti avremo

$y = \frac{x^2}{2} \int \frac{x^{m-1}dx}{1-x} - \frac{1}{2} \int \frac{x^{m+1}dx}{1-x} - x \int \frac{x^m dx}{1-x} + \int \frac{x^{m+1}dx}{1-x}$; ora facendo $x = 1$ fuori del segno integrale s' avrà

$$y = \frac{1}{2} \int \frac{x^{m-1}(1-x^2)dx}{1-x} - \int \frac{x^m(1-x)dx}{1-x}$$

$$y = \frac{1}{2} \int x^{m-1} dx + \frac{1}{2} \int x^m dx - \int x^m dx$$

$y = \frac{1}{2} (\int x^{m-1} dx - \int x^m dx) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+1}}{m+1} \right)$; e facendovi $x = 1$, avremo

$y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{1}{2m(m+1)}$, e però la somma della serie proposta sarà $\frac{1}{2m(m+1)}$.

Sia proposta da sommarsi la serie

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}+\text{ec.}$$

Si ponga come sopra

$$y=\frac{x^{m+3}}{m(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{x^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}+\text{ec.},$$ ed y rappresenterà la somma della proposta, purchè vi si faccia $x=1$. Differenziando quattro volte nella supposizione di dx costante avremo $\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{x^{m-1}}{1-x}$ e perciò

$$y=\int dx\int dx\int dx\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x}$$

Facendo l'integrazione per parti si giunge a questa espressione

$$y=\frac{x^3}{2.3}\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x}-\frac{1}{2.3}\int\frac{x^{m+2}dx}{1-x}-\frac{x}{2}\int\frac{x^{m+1}dx}{1-x}+\frac{1}{2}\int\frac{x^{m+2}dx}{1-x}+$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{x^{m+2}dx}{1-x}-\frac{x^2}{2}\int\frac{x^{m}dx}{1-x}+x\int\frac{x^{m+1}dx}{1-x}-\int\frac{x^{m+2}dx}{1-x};$$ e facendo $x=1$ fuori del segno integrale, s'avrà

$$y=\int\left(\frac{x^{m-1}}{2.3}-\frac{x^{m+1}}{2}-\frac{x^{m}}{2}+x^{m+1}-\frac{x^{m+2}}{2.3}\right)\frac{dx}{1-x}$$

$$y=\int\left(\frac{x^{m-1}}{2.3}(1-x^3)-\frac{x^{m}}{2}(1-x)\right)\frac{dx}{1-x}$$

$$y=\int\left(\frac{x^{m-1}}{2.3}(1+x+x^2)-\frac{x^{m}}{2}\right)dx$$

$$y=\frac{1}{2.3}\left(\frac{x^{m}}{m}-\frac{2x^{m+1}}{m+1}+\frac{x^{m+2}}{m+2}\right)$$

Se in quest' ultima espressione di y si fa $x=1$, s'avrà per la somma della proposta serie

$$\frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{m}-\frac{2}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right)=\frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right)=\ldots\ldots\frac{1}{3m(m+1)(m+2)}.$$

Osservando la legge che tengono le varie somme che abbiamo trovato, si vedrà che la somma di quest' altra serie

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}+\text{ec.}$$

sarà

$\dfrac{1}{4m(m+1)(m+2)(m+3)}$. Così delle altre simili.

Nelle superiori integrazioni si sono lasciate le costanti; poichè dovendo i valori dell' y essere zero, quando x è zero, delle costanti divenivano nulle.

§. 29. Si può ancora dedurre dall' integrazione delle equazioni lineari, la somma di tutte le serie trascendenti di questa forma

$1+\dfrac{x^n}{1.2.3\ldots.n}+\dfrac{x^{2n}}{1.2.3\ldots.2n}+$ ec. all' infinito, essendo n un numero intero positivo. Per questo facendo quella serie eguale ad y e differenziando n volte nella supposizione di dx costante avremo

$\dfrac{d^ny}{dx^n}=1+\dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\dfrac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}+$ ec. e perciò

$y-\dfrac{d^ny}{dx^n}=0$ equazione lineare dell' ordine n, di cui l' integrale sarà la ricercata somma. Un tale integrale dipende per le cose dette al §. 5. dalla risoluzione di questa equazione $1-a^n=0$.

Se

Se si suppone $n=2$, avremo $1-\alpha^2=0$, e perciò $\alpha=\pm 1$ o la somma della serie

$1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+$ ec. sarà

$y=e^{-x}\int e^{2x}dx\int o.dx$; ma $\int o.dx$ è eguale ad una costante C', dunque

$y=e^{-x}\int e^{2x}.C'$, e integrando

$y=e^{-x}(C'e^{2x}+C)=\frac{C'e^{2x}+C}{e^x}$. Le costanti C, C' si determineranno facendo nella serie $x=0$; si ha allora $y=1$, e perciò $C'+C=1$, ed essendo una sola equazione fra due costanti, una rimarrà perciò sempre arbitraria; se si fa $C=C'=\frac{1}{2}$ avremo $y=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$.

FINE DEL SECONDO CAPITOLO.

CAPITOLO III.

Delle Equazioni lineari a differenze Finite e Parziali.

§. 1. Se per $z_{x,y}$ si rappresenta una funzione delle variabili x, y e per le caratteristiche $\overset{x}{\Delta}{}^n$, $\overset{y}{\Delta}{}^m$ poste avanti a $z_{x,y}$ le differenze finite n^{esime} e m^{sime} di questa istessa funzione, facendovi variare o la sola x o la sola y, in modo che per $\overset{x}{\Delta}{}^n z_{x,y}$ s' indichi la differenza finita n^{esima} di $z_{x,y}$ quando la sola x cresce per esempio della unità; per $\overset{y}{\Delta}{}^m z_{x,y}$ la differenza m^{esima} finita di $z_{x,y}$ quando la sola y cresce dell' unità, e per $\overset{x}{\Delta}{}^n \overset{y}{\Delta}{}^m z_{x,y}$ la differenza n^{esima} della differenza m^{esima} della funzione $z_{x,y}$, presa la prima differenza nell' ipotesi che vari la x e l'altra in quella che vari la y, le quantità $\overset{x}{\Delta}{}^n z_{x,y}$, $\overset{y}{\Delta}{}^m z_{x,y}$, $\overset{x}{\Delta}{}^n \overset{y}{\Delta}{}^m z_{x,y}$ si chiamano differenze finite e parziali.

Si ricava dal fin quì detto che

$$\overset{x}{\Delta} z_{x,y} = z_{x+1,y} - z_{x,y}$$

$$\overset{y}{\Delta} z_{x,y} = z_{x,y+1} - z_{x,y}$$

$$\overset{x}{\Delta}\overset{y}{\Delta} z_{x,y} = z_{x+1,y+1} - z_{x,y+1} - z_{x+1,y} + z_{x,y}$$

$$\overset{x}{\Delta}{}^2 z_{x,y} = z_{x+2,y} - 2z_{x+1,y} + z_{x,y}$$

ec. ec.

Dal che si deduce che le differenze parziali $\overset{x}{\Delta}{}^n z_{x,y}$, $\overset{y}{\Delta}{}^m z_{x,y}$ $\overset{x}{\Delta}{}^n \overset{y}{\Delta}{}^m z_{x,y}$ si potranno sempre esprimere per le diverse funzioni $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x,y+1}$, ec. $z_{x+n,y}$, $z_{x,y+m}$, $z_{x+n,y+m}$.

Una equazione fra le variabili x, y, la funzione $z_{x,y}$ e quelle differenze parziali, si chiama *Equazione a differenze finite e parziali*.

Ora sarà sempre facile eliminare da una tale equazione quelle differenze parziali medesime sostituendovi per esse le di loro espressioni, che abbiamo sopra indicate, e così ridurre l'equazione a non contenere altro che le variabili x, y e le funzioni $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$ ec. ec. $z_{x+n,y+m}$.

Noi per questo, seguendo l'uso degl'altri Geometri, daremo il nome d'*Equazione a differenze finite e parziali*, ad una equazione fra le citate funzioni $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x,y+1}$, $z_{x+1,y+1}$, ec.; e se di più quelle funzioni non vi sono

che sotto la forma lineare, l'Equazione si chiamerà *lineare*. Come nelle equazioni lineari a differenze finite, così in queste si distinguono vari ordini. L'ordine di una equazione a differenze finite e parziali è indicato dalla più grande somma degli aumenti delle variabili x, y in un medesimo termine: così le $m + n$ è la maggior somma di questi aumenti, se cioè $z_{x+m, y+n}$ è il termine nel quale le variabili hanno la maggior somma dei loro aumenti, l'equazione è allora dell'ordine $(m+n)^{esimo}$.

Una equazione adunque lineare dell'ordine n^{esimo} avrà questa forma

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + Cz_{x+2,y} + \ldots + Nz_{x+n,y} \\ \quad + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} + \ldots + N'z_{x+n-1,y+1} \\ \quad\quad + C''z_{x+2,y} + \ldots + N''z_{x+n-2,y+2} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad + N^{(n)}z_{x,y+n} \end{array}\right\} = X$$

A, B, C, D ec. A', B' ec. X possono essere funzioni delle variabili x e y.

§. 2. Incominciamo dalle equazioni del primo ordine. Si abbia da integrare l'equazione a differenze finite e parziali

$$Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + B'z_{x,y+1} = 0$$

nella quale A, B, B' sono costanti, e il secondo membro è zero. (S' avverta che per *integrale completo* di una equazio-

ne a differenze finite e parziali dell' ordine m^{esimo} s' intende dai Geometri una tale espressione della variabile $z_{x,y}$ che contenga un numero n di funzioni arbitrarie; la quale espressione di $z_{x,y}$ sostituita nella proposta equazione la renda identica; così nel nostro caso l' integrale per essere completo dovrà contenere una funzione arbitraria).

Per riuscire in questa ricerca, si faccia $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$ essendo α e β due costanti da determinarsi (a). Fatta questa supposizione è chiaro che avremo

$$z_{x+1,y} = \alpha^{x+1} \beta^y = \alpha^x \beta^y . \alpha$$

$z_{x,y+1} = \alpha^x \beta^{y+1} = \alpha^x \beta^y . \beta$; e sostituendo questi valori di z nella proposta, dopo averla divisa per il fattore comune $\alpha^x \beta^y$, s' avrà $A + B\alpha + B'\beta = 0$.

Per mezzo di questa equazione una delle due indeterminate α, β si può determinare per altra. Prendendo il valore di β s' avrà $\beta = -\frac{A}{B'} - \frac{B}{B'}\alpha$; e facendo per semplicità $-\frac{A}{B'} = a$, $-\frac{B}{B'} = b$ s' avrà $\beta = a + b\alpha$.

Il valore adunque di $z_{x,y}$ diverrà $z_{x,y} = \alpha^x (a + b\alpha)^y =$

(a) Il metodo che seguiamo si deve al Celebre La-Grange, il quale lo ha sviluppato in una sua memoria inserita negl' atti di Berlino del 1775.

$$a^y . \alpha^x + y a^{y-1} b \alpha^{x+1} + y \frac{(y-1)}{2} a^{y-2} b^2 . \alpha^{x+2} + \ldots + b^y . \alpha^{x+y},$$

nella quale espressione α rimane indeterminata.
Per determinarla si osservi che facendo $y = 0$ nell' equazione $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, si ha $z_{x,0} = \alpha^x$; dal che si deduce che in generale avremo $z_{x+\omega,0} = \alpha^{x+\omega}$: onde il valore di $z_{x,y}$ diverrà

$$z_{x,y} = a^y . z_{x,0} + y a^{y-1} b . z_{x+1,0} + y \frac{(y-1)}{2} a^{y-2} b^2 z_{x+2,0} + \ldots + b^y z_{x+y,0}.$$

I valori adunque di $z_{x,y}$ quando y è zero rimangono indeterminati, e perciò devono essere dati, e possono essere qualunque. Se per più generalità supponghiamo $z_{x,0} = \phi x$, esprimendo per ϕx una funzione qualunque di x, avremo il valore di $z_{x,y}$ così espresso

$$z_{x,y} = a^y \phi x + y a^{y-1} b . \phi(x+1) + y \frac{(y-1)}{2} a^{y-2} b^2 . \phi(x+2) + \ldots + b^y \phi(x+y),$$

il quale sarà composto di $y+1$ termini e conterrà una funzione arbitraria: Questo sarà adunque l' integrale completo dell' equazione del primo ordine proposta. Se invece di determinare β per α si fosse determinato α per β, avremmo avuto $\alpha = b^{-1}(\beta - a)$, onde

$$z_{x,y}=\beta^y b^{-x}(\beta-a)^x=b^{-x}\left(\beta^{y+x}-xa\beta^{y+x-1}+x\frac{(x-1)}{2}a^2\times\right.$$

$\left.\beta^{y+x-2}\ldots\pm a^x.\beta^y\right)$, e per il medesimo ragionamento che si è fatto quì sopra, avremmo trovato

$$z_{x,y}=b^{-x}\left(\Upsilon(x+y)-xa.\Upsilon(x+y-1)+x\frac{(x-1)}{2}a^2.\Upsilon(x+y-2)\ldots\pm a^x.\Upsilon(y)\right)$$

; espressione che rappresenta parimente l' integrale completo della proposta, poichè contiene una funzione arbitraria Υ. Questo integrale che è posto sotto una forma diversa da quella dell' integrale antecedente, contiene $x+1$ termini.

§. 3. Passiamo alle equazioni del secondo ordine. S' abbia da integrare l' equazione di secondo ordine

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y}+Bz_{x+1,y}+Cz_{x+2,y} \\ \quad +B'z_{x,y+1}+C'z_{x+1,y+1} \\ \quad\quad +C''z_{x,y+2} \end{array}\right\}=0.$$

nella quale i coefficienti A, B, ec. si suppongono costanti. S' incominci da esaminare il caso nel quale essa non ha che quattro termini

$Az_{x,y}+Bz_{x+1,y}+B'z_{x,y+1}+C'z_{x+1,y+1}=0$, e facendo come sopra $z_{x,y}=a^x\beta^y$, s' avrà per mezzo della sostituzione, fra a e β questa equazione

$A+Ba+B'\beta+C'a\beta=0$.

Con tale equazione determiniamo β per α, e s' avrà $\beta = -\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}$; onde sarà $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y = \alpha^x \left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^y$.

Se adesso si svolge questa espressione in serie ordinata secondo le potenze decrescenti di α, s' avrà per $z_{x,y}$ una espressione di questa forma

$z_{x,y} = T\alpha^{x+\mu y} + T'\alpha^{x+\mu y-1} + T''\alpha^{x+\mu y-2} +$ ec.; ora facendo nell' equazione $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, $y = 0$ si ha $z_{x,0} = \alpha^x$, ed in generale $z_{x+\omega,0} = \alpha^{x+\omega}$: fatta perciò questa sostituzione nella trovata espressione per $z_{x,y}$ si ha

$z_{x,y} = Tz_{x+\mu y,0} + T'z_{x+\mu y-1,0} + T''z_{x+\mu y-2} +$ ec. I valori adunque di $z_{x,y}$ quando la variabile y è zero, devono essere dati, e perciò potranno essere funzioni qualunque di x dipendenti dal nostro arbitrio; così se si rapprerenta generalmente per $\varphi(x+\omega)$ la funzione $z_{x+\omega,0}$ s' avrà una più generale forma del nostro integrale

$z_{x,y} = T\varphi(x+\mu y) + T'\varphi(x+\mu y-1) + T''\varphi(x+\mu y-2) +$ ec.

la quale anderà all' infinito, sempre che la quantità $\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^y$ non si potrà svolgere in serie finita, o sempre che non sarà eguale a zero qualchè funzione $\varphi(x+\mu y-\omega)$ e le

e le sue seguenti; la quantità però $\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^y$ si riduce in una serie finita quando B′ ovvero C′ sono zero. Ma per trovare l' integrale in termini finiti ancora quando B′ ovvero C′ non sono nulle s' adoprerà il metodo seguente.

§. 4. Si faccia nel valore di β, la quantità $B'+C'\alpha$ eguale ad una nuova indeterminata $-\omega$, e s' avrà $\alpha=-\frac{\omega+B'}{C'}$. Sustituendo ora questo valore di α in quello di β avremo

$\beta=-\frac{B}{C}+\left(A-\frac{BB'}{C'}\right)\frac{1}{\omega}$: s' avrà dunque

$$\alpha=-\frac{\omega}{C'}\left(1+\frac{B'}{\omega}\right),$$

$\beta=-\frac{B}{C'}\left(1+\left(B'-\frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right)$ e perciò

$$z_{x,y}=\alpha^x\beta^y=\left(-\frac{\omega}{C'}\left(1+\frac{B'}{\omega}\right)\right)^x\left(1+\left(B'-\frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right)^y.$$

Ora i due fattori $\left(-\frac{\omega}{C'}\left(1+\frac{B'}{\omega}\right)\right)^x$, $\left(1+\left(B'-\frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right)^y$ ridotti in serie secondo le potenze di ω danno due serie di questa forma

$$P\omega^x+P'\omega^{x-1}+P''\omega^{x-2}+\ldots+P^{(x)}$$

$$Q+Q'\omega^{-1}+Q''\omega^{-2}+\ldots+Q^{(y)}\omega^{-y},$$ dalla moltiplicazione delle quali verrà per $z_{x,y}$ una espressione finita di questa forma

$z_{x,y} = V\omega^{x} + V'\omega^{x-1} + V''\omega^{x-2} + \ldots + V^{(x)} + V^{(x+1)}\omega^{-1} + \ldots$

$\ldots + V^{(x+y)}\omega^{-y}$, la quale sarà sempre composta di un numero finito di termini, poichè x e y sono numeri interi positivi.

Se adesso nell'equazione $z_{x,y} = \alpha^{x}\beta^{y}$ si fa $y = 0$ s' avrà

$z_{x,0} = \alpha^{x} = \left(-\frac{\omega}{C'}\left(1 + \frac{B'}{\omega}\right)\right)^{x}$; e siccome ω è una indeterminata, perciò si concluderà che il valore della funzione $z_{x,y}$ quando y è zero, rimane indeterminato, e si può prendere per esso qualunque funzione $\varphi(x)$ di x. Avremo adunque

$\varphi(x) = \left(-\frac{\omega}{C'}\left(1 + \frac{B'}{\omega}\right)\right)^{x}$: ora abbiamo detto sopra che il secondo membro di questa equazione sviluppato per mezzo della formola Neuttoniana, è

$P\omega^{x} + P'\omega^{x-1} + P''\omega^{x-2} + \ldots + P^{(x)}$; e perciò $\varphi(x)$ sarà eguale a questa espressione: e siccome la funzione di x è arbitraria, può avere però qualunque forma; così possiamo supporre

$\varphi(x) = Pf(x) + P'f(x-1) + P''f(x-2) + \ldots + P^{(x)}f(0)$ essendo $f(x)$ una altra qualunque funzione di x.

Paragonando le due espressioni di $\varphi(x)$ vedremo che in vece della potenza x^{esima} di ω possiamo prendere una funzione arbitraria $f(x)$; l'espressione allora di $z_{x,y}$ si ridurrà alla seguente

$$z_{x,y} = V . f(x) + V' . f(x-1) + \dots + V^{(x)} . f(0) + V^{(x+1)} \times$$
$$f(-1) + \dots + V^{(x+y)} . f(-y).$$

Quantunque questa espressione di $z_{x,y}$ contenga una funzione arbitraria pure essa non è che un integrale particolare della equazione proposta, poichè per esserlo completo dovrebbe contenere due funzioni arbitrarie.

§. 5. L' espressione che abbiamo dato per $z_{x,y}$ è sempre finita; per trovare poi i valori di V, V', V'', ec. è manifesto che non s' avrà a fare altro che moltiplicare fra loro le due serie che esprimono i valori di α^x, β^y: così facendo nel valore di α, la quantità $-\frac{1}{C'} = m$, $B' = n$, e in quello di β, le quantità $-\frac{B}{C'} = p$, $B' - \frac{AC'}{B} = q$, avremo

$$\alpha^x = \left(m\omega(1 + \tfrac{n}{\omega})\right)^x = m^x \left(\omega^x + xn\omega^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2} n^2 \omega^{x-2} + \text{ec.}\right)$$

$$\beta^y = \left(p(1 + \tfrac{q}{\omega})\right)^y = p^y \left(1 + y\frac{q}{\omega} + \frac{y(y-1)}{2} . \frac{q^2}{\omega^2} + \text{ec.}\right)$$ la moltiplicazione delle quali serie darà

$$V = m^x p^y,$$

$$V' = m^x p^y (xn + yq),$$

$$V'' = m^x p^y \left(\frac{x(x-1)}{2} n^2 + xn . yq + \frac{y(y-1)}{2} q^2\right),$$

$$V''' = m^x p^y \left(\frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} n^3 + \frac{x(x-1)}{2} n^2 \cdot yq + xn \cdot \frac{y(y-1)}{2} q^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \frac{y(y-1)(y-2)}{2 \cdot 3} q^3 \right)$$

. . . .

$$V^{(s)} = m^x p^y \left(\frac{x(x-1)(x-2) \ldots (x-s+1)}{2 \cdot 3 \ldots s} n^s + \frac{x(x-1)(x-2) \ldots (x-s+2)}{2 \cdot 3 \ldots (s-1)} n^{s-1} \times \right.$$

$$yq + \frac{x(x-1) \ldots (x-s+3)}{2 \cdot 3 \ldots (s-2)} n^{s-2} \cdot \frac{y(y-1)}{2} q^2 + \ldots \ldots + xn \times$$

$$\left. \frac{y(y-1) \ldots (y-s+2)}{2 \cdot 3 \ldots (s-1)} q^{s-1} + \frac{y(y-1) \ldots (y-s+1)}{2 \cdot 3 \ldots s} q^s \right)$$ se

si abbia $q = n$, ciò che accade quando $A = 0$, si avranno questi più semplici valori dei coefficienti

$$V = m^x p^y,$$

$$V' = m^x p^y (x+y) n,$$

$$V'' = m^x p^y \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} n^2,$$

$$V''' = m^x p^y \cdot \frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)}{2 \cdot 3} n^3, \text{ ec.}$$

Allorchè passeremo all' applicazioni di queste Teorie parleremo della determinazione delle funzioni arbitrarie.

§. 6. Ritorniamo adesso all' equazione di secondo ordine, alla quale non manchi alcun termine.

Facendo come sopra $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$ e sostituendo e dividendo per il fattore comune $\alpha^x \beta^y$ si verrà a questa equazione fra α e β

$A + B\alpha + C\alpha^2 + B'\beta + C'\alpha\beta + C''\beta^2 = 0$, per la quale determinando β in α s' avrà

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\left(C'\alpha + B' \pm \sqrt{(C'\alpha + B')^2 - 4C''(C\alpha^2 + B\alpha + A)}\right),$$

e perciò il valore di $z_{x,y}$ sarà così espresso

$$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y = \alpha^x \left(-\frac{1}{2C''}\left(C'\alpha + B' \pm \ldots \ldots \sqrt{(C'\alpha + B')^2 - 4C''(C\alpha^2 + B\alpha + A)}\right)\right)^y.$$

Per $z_{x,y}$ avremo adunque due valori uno prendendo il segno + del radicale, l' altro prendendo il segno −. Si prenda per ora il segno superiore. Se per mezzo d' alcuno dei metodi immaginati dai Geometri per l' evoluzione delle funzioni in serie, si riduce l' espressione di $z_{x,y}$ in una serie ordinata secondo le potenze decrescenti di α, avremo una serie infinita di questa forma

$$z_{x,y} = T.\alpha^{x+\mu y} + T'.\alpha^{x+\mu y-\mu'} + T''.\alpha^{x+\mu y-\mu''} + \text{ec.}$$

Ora con un ragionamento simile a quello fatto al §. 2., si vedrà che per $\alpha^{x+\omega}$ si può sostituire qualunque funzione $\varphi(x+\omega)$ della quantità $x+\omega$: avremo adunque per $z_{x,y}$ la seguente serie

$$z_{x,y} = T.\varphi(x+\mu y) + T'.\varphi(x+\mu y-\mu') + T''.\varphi(x+\mu y-\mu'') + \text{ec.}$$

Nella medesima guisa se si prende il segno meno, s' av

un altra simil serie per esprimere il valore di $z_{x,y}$: questa sarà

$$z_{x,y} = V.\alpha^{x+\nu y} + V'.\alpha^{x+\nu y-\nu'} + V''.\alpha^{x+\nu y-\nu''} + \text{ec.};$$ e ponendo per una qualunque potenza $\alpha^{x+\omega}$ una funzione arbitraria $\Psi(x+\omega)$, avremo

$$z_{x,y} = V.\Psi(x+\nu y) + V'.\Psi(x+\nu y-\nu') + V''.\Psi(x+\nu y-\nu'') + \text{ec.}$$

che sarà una seconda espressione di $z_{x,y}$: ora l' equazione proposta essendo lineare, soddisfarà ad essa ancora la somma delle due espressioni trovate, e sarà

$$z_{x,y} = T.\varphi(x+\mu y) + T'.\varphi(x+\mu y-\mu') + T''.\varphi(x+\mu y-\mu'') + \text{ec.}$$
$$+ V.\Psi(x+\nu y) + V'.\Psi(x+\nu y-\nu') + V''.\Psi(x+\nu y-\nu'') + \text{ec.}$$

e questa espressione si chiama dai Geometri l' integrale completo della proposta perchè, essendo essa del secondo ordine, contiene due funzioni arbitrarie φ, Ψ.

Le quantità T, T', T'', ec. V, V', V'', ec. sono funzioni di x che si hanno facendo l' attuale svolgimento delle funzioni in serie; μ, μ', μ'', ec. ν, ν', ν'', ec. sono numeri positivi e crescenti. L' espressione che noi abbiamo trovato per $z_{x,y}$ sarà sempre infinita, se la quantità che è sotto il segno radicale non è un quadrato perfetto, cioè se non spariscono dal valore di β i radicali di una quantità complessa in α; che equivale a dire se l' equazione fra α e β non è risolubile in due fattori di primo grado; in questo ultimo caso l' espressione diviene composta di un numero finito di termini, come fra poco vedremo.

§. 7. Contentandosi d' avere l' integrali completi espres-

sì per delle serie, che vadano all' infinito, il metodo adoprato per il secondo ordine serve per l' equazione di qualunque ordine: infatti s' abbia da integrare l' equazione generale dell' ordine n^{esimo}

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + Cz_{x+2,y} + \ldots + Nz_{x+n,y} \\ \quad + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} + \ldots + N'z_{x+n-1,y+1} \\ \qquad + C''z_{x,y+2} + \ldots + N''z_{x+n-2,y+2} \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \qquad\qquad + N^{(n)}z_{x,y+n} \end{array}\right\} = 0.$$

Se si prende come ai §§. antecedenti $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, e quindi si fanno le debite sostituzioni avremo, dopo avere diviso per $\alpha^x \beta^y$, fra α e β questa equazione algebraica del grado n

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots + N\alpha^n + \beta(B' + C'\alpha + \ldots + N'\alpha^{n-1}) +$$
$$\beta^2(C'' + \ldots + N''\alpha^{n-2}) + \ldots + N^{(n)}\beta^n = 0,$$ la quale risoluta darà un numero n di valori diversi di β, e però di β^y. Questi valori saranno in generale tante funzioni irrazionali di α, le quali non potranno in generale ridursi che in serie infinite secondo le potenze decrescenti di α. Siano tali serie

$$\beta^y = T.\alpha^{\mu y - \mu'} + T'\ \alpha^{\mu y - \mu''} + \text{ec.}$$

$$\beta^y = T1.\alpha^{\nu y - \nu'} + T'1.\alpha^{\nu y - \nu''} + \text{ec.}$$

$$\beta^y = T2.\alpha^{\theta y - \theta'} + T'2.\alpha^{\theta y - \theta''} + \text{ec.}$$

ec. ec.

Queste n serie moltiplicate ciascuna per α^x, ci daranno n espressioni di $z_{x,y}$; e se in ciascuna di queste espressioni si sostituisce in vece di $\alpha^{x+\omega}$ una funzione arbitraria $\phi(x+\omega)$ diversa in ciascuna di esse, avremo per $z_{x,y}$ un numero n di valori diversi, ciascuno dei quali sarà una serie infinita e conterrà una funzione arbitraria. La somma adunque di questi valori, contenendo un numero n di funzioni arbitrarie diverse rappresenterà perciò l' integrale completo della proposta.

§. 8. Se l' equazione fra α e β potesse risolversi in n fattori di primo grado, se potesse cioè mettersi sotto questa forma

$$(\beta - a'\alpha - b')(\beta - a''\alpha - b'')(\beta - a'''\alpha - b''')\ldots(\beta - a^{(n)}\alpha - b^{(n)}) = 0,$$

l' integrale completo sarebbe composto di un numero finito di termini: infatti s' avrebbe allora

$\beta = a'\ \alpha + b'$, $\beta = a''\alpha + b''$, $\beta = a'''\alpha + b'''$, $\beta = a''''\alpha + b''''$, ... $\beta = a^{(n)}\alpha + b^{(n)}$; questi n diversi valori di β ci daranno n diversi valori di β^y e perciò di $\alpha^x\beta^y$ ovvero di $z_{x,y}$, la somma dei quali soddisfarà anche alla proposta per essere questa lineare: avremo in conseguenza, prendendo per $z_{x,y}$ questa somma medesima

$$z_{x,y} =$$

$$z_{x,y} = \alpha^x (a'\alpha + b')^y + \alpha^x (a''\alpha + b'')^y + \alpha^x (a'''\alpha + b''')^y + \ldots +$$

$$\alpha^x (a^{(n)}\alpha + b^{(n)})^y \text{ ovvero}$$

$$z_{x,y} = a'^y . \alpha^{x+y} + ya'^{y-1} b' . \alpha^{x+y-1} + y\left(\frac{y-1}{2}\right) a'^{y-2} b'^2 \times$$

$$\alpha^{x+y-2} + \ldots + b'^y . \alpha^x$$

$$+ a''^y . \alpha^{x+y} + ya''^{y-1} b'' . \alpha^{x+y-1} + y\left(\frac{y-1}{2}\right) a''^{y-2} b''^2 \times$$

$$\alpha^{x+y-2} + \ldots + b''^y . \alpha^x$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ a^{(n)y} . \alpha^{x+y} + ya^{(n)\,y-1} b^{(n)} . \alpha^{x+y-1} + \ldots + b^{(n)y} . \alpha^x .$$

La quantità α rimane indeterminata. Per determinarla s' osservi che facendo $y = 0$ nell' equazione $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, avremo $z_{x,0} = \alpha^x$: i valori adunque di z quando in essa si fa $y = 0$ rimangono indeterminati, e perciò possono essere qualunque funzioni di x che ci piaccia; onde per α^x si può prendere una funzione qualunque di x, che indicheremo per $\varphi'(x)$; e perciò prenderemo in generale $\varphi'(x + \omega)$ per $\alpha^{x+\omega}$. Ponendo adesso nell' espressione trovata per $z_{x,y}$, tante diverse funzioni di $x + y$, quanti sono i coefficienti diversi da cui è moltiplicato α^{x+y}, s' avrà

$$z_{x,y} = a'^{y}.\varphi'(x+y) + ya'^{y-1}b'.\varphi'(x+y-1) + y\left(\frac{y-1}{2}\right)a'^{y-2}b'^{2} \times$$

$$\varphi'(x+y-2) + \ldots + b'^{y}.\varphi'(x)$$

$$+ a''^{y}.\varphi''(x+y) + ya''^{y-1}b''.\varphi''(x+y-1) + \ldots + b''^{y}.\varphi''(x)$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ a^{(n)y}.\varphi^{(n)}(x+y) + ya^{(n)y-1}b^{(n)}.\varphi^{(n)}(x+y-1) + \ldots +$$

$b^{(n)y}.\varphi^{(n)}(x)$; e questo sarà l' integrale completo della proposta, poichè contiene un numero n di funzioni arbitrarie $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, ec.

§. 9. Se supponghiamo che $b' = b'' = b''' \ldots = b^{(n)} = 0$, vale a dire che la proposta sia.

$$Nz_{x+n,y} + N'z_{x+n-1,y+1} + N''z_{x+n-2,y+2} + \ldots + N^{(n)}z_{x,y+n} = 0,$$ la quale conduce all' equazione

$N\alpha^{n} + N'\alpha^{n-1}\beta + N''\alpha^{n-2}\beta^{2} + \ldots + N^{(n)}\beta^{n} = 0$, fra α e β, che può sempre supporsi risoluta in fattori di questa forma $\beta - a'\alpha$. Poichè dividendola tutta per α^{n} e considerando per incognita $\frac{\beta}{\alpha}$ si hanno da essa n valori per $\frac{\beta}{\alpha}$ e perciò n fattori di quella forma, s' avrà allora, facendo nella formola del §. antecedente $b' = b'' = b''' =$ ec. $= 0$ così espresso l' integrale completo di una tale equazione

$$z_{x,y} = a'^{y}\varphi'(x+y) + a''^{y}\varphi''(x+y) + a'''^{y}\varphi'''(x+y) + \ldots + a^{(n)y}\varphi^{(n)}(x+y).$$

Se l' equazione proposta non avesse che i termini nei quali le variabili x, y hanno i medesimi aumenti, se fosse cioè di questa forma

$$Az_{x,y} + Bz_{x+1,y+1} + \ldots + Pz_{x+m,y+m} = 0,$$ facendo come sopra $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, si giungerebbe a questa equazione

$A + B\alpha\beta + \ldots\ldots + P\alpha^m\beta^m = 0$, la quale, considerando per incognita $\alpha\beta$, ci darà m valori a', a'', ec. per $\alpha\beta$; e perciò si può ad essa dare questa forma

$$(\alpha\beta - a')(\alpha\beta - a'')(\alpha\beta - a''') \ldots (\alpha\beta - a^{(m)}) = 0.$$

Da questi m fattori si ricava m valori per β, i quali sono $a'\alpha^{-1}$, $a''\alpha^{-1}$, $a'''\alpha^{-1}$, ec.: così si hanno per $z_{x,y}$ m valori diversi, i quali sono $a'^{y}.\alpha^{x-y}$, $a''^{y}.\alpha^{x-y}$, $a'''^{y}.\alpha^{x-y}$, ec.

Presa ora la somma di questi valori, e introducendovi le diverse funzioni arbitrarie per mezzo del ragionamento fatto al §. 8., s'avrà l'integrale così espresso

$$z_{x,y} = a'^{y}.f'(x-y) + a''^{y}.f''(x-y) + a'''^{y}.f'''(x-y) + \ldots + a^{(m)y}.f^{(m)}(x-y).$$

f', f'', f''' ec. indicano delle funzioni arbitrarie diverse della quantità $x-y$.

§. 10. Riprendendo il valore di β dato al §. 6., cioè

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\Big(C'\alpha + B \pm \sqrt{(C'^2 - 4C''C)\alpha^2 + (2C'B' - 4C''B)\alpha + B'^2 - 4C''A}\Big),$$

e facendo per più semplicità di calcolo $p = C'^2 - 4C''C$, $q = 2C'B' - 4C''B$, $r = B'^2 - 4C''A$, s'avrà

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\Big(C'\alpha + B \pm \sqrt{p\alpha^2 + q\alpha + r}\Big),$$

ed è chiaro che se in vece dell'indeterminata α si prende una funziene intera d'un'altra indeterminata ω in modo che la quantità $p\alpha^2 + q\alpha + r$ sia un quadrato perfetto, svanirà dal valore di β il radicale, ed allora si potrà ridurre il valore di β in una serie finita ordinata secondo le potenze della indeterminata ω: secondo la Teoria dell' Analisi degl' indeterminati (*a*), se si fa $\alpha = \frac{q^2 - 4rp}{4p} \cdot \frac{1}{\omega} + \frac{1}{4p} \cdot \omega - \frac{q}{2p}$ si ha $p\alpha^2 + q\alpha + r$ eguale al quadrato $\left(\frac{q^2 - 4rp - \omega^2}{2\omega \cdot 2\sqrt{p}}\right)^2$: avremo adunque per β questo valore

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\Big(C'\alpha + B \pm \Big(\frac{q^2 - 4rp - \omega^2}{4\omega \cdot \sqrt{p}}\Big)\Big);$$

possiamo adunque e-

(*a*) V. il T. II. degli Elem. d' Algebra d' Eulero.

sprimere i valori di α e di β in espressioni razionali di un altra indeterminata ω, ed avremo $\alpha = e\omega + f\omega^{-1} + g$, $\beta = e'\omega + f'\omega^{-1} + g'$, quando si prende il segno +, essendo $f = \frac{q^2 - 4rp}{4p}$, $e = \frac{1}{4p}$, $g = -\frac{q}{2p}$; i valori poi di e', f', g' si ricavano dalla sostituzione dell' espressione in ω trovata per α nel valore di β che abbiamo quì sopra. Dopo di questo si concluderà che avremo per $z_{x,y}$ questa espressione

$$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y = (e\omega + f\omega^{-1} + g)^x (e'\omega + f'\omega^{-1} + g')^y,$$ la quale essendo sviluppata ed ordinata secondo le potenze di ω, si ridurrà ad una serie finita di questa forma

$$z_{x,y} = \mathrm{V} + \mathrm{V}'\omega + \mathrm{V}''\omega^2 + \mathrm{V}'''\omega^3 + \ldots + \mathrm{V}^{(x+y)}.\omega^{x+y}$$

$$+ {}'\mathrm{V}\omega^{-1} + {}''\mathrm{V}\omega^{-2} + {}'''\mathrm{V}\omega^{-3} + \ldots + {}^{(x+y)}\mathrm{V}.\omega^{-(x+y)},$$

nella quale i coefficienti V, V', ec. $'\mathrm{V}, ''\mathrm{V}$, ec. saranno delle funzioni di x e di y che si possono determinare in differenti maniere secondo i metodi conosciuti.

§. 11 Se si fa nell' equazione

$$z_{x,y} = (e\omega + f\omega^{-1} + g)^x (e'\omega + f'\omega^{-1} + g')^y$$ la variabile $y = 0$, si ha

$$z_{x,0} = (e\omega + f\omega^{-1} + g)^x$$ e siccome ω è una quantità indeterminata, perciò si conclude che il valore della funzione

$z_{x,y}$ quando y è zero, rimane indeterminato, e si può prendere per esso qualunque funzione $f(x)$ di x, avremo adunque

$\phi(x)=(e\omega+f\omega^{-1}+g)^x$ ed in generale

$$\phi(x+\xi)=(c\omega+f\omega^{-1}+g)^{x+\xi}.$$

Se si suppone che la quantità $(e\omega+f\omega^{-1}+g)^{x+\xi}$ sia sviluppata per mezzo della formola Neuttoniana avremo

$$\phi(x+\xi)=P.\omega^{x+\xi}+P'.\omega^{x+\xi-1}+P''.\omega^{x+\xi-2}+\ldots+P^{(x+\xi)}$$

$$+Q.\omega^{-x-\xi}+Q'.\omega^{-x-\xi+1}+Q''.\omega^{-x-\xi+2}+\ldots+Q^{(x+\xi-1)}.\omega^{-1}$$; i P e i Q sono funzioni di x facili a determinarsi: e siccome la funzione $\phi(x+\xi)$ è arbitraria e può avere qualunque forma, perciò possiamo fare

$$\phi(x+\xi)=P.f(x+\xi)+P'f(x+\xi-1)+\ldots+P^{(x+\xi)}.f(0)$$

$$+Q\,f(-x-\xi)+Q'.f(-x-\xi+1)+\ldots+Q^{(x+\xi-1)}f(-1),$$ essendo $f(x+\xi)$ una qualunque funzione di $x+\xi$.

Paragonando queste due espressioni di $\phi(x+\xi)$ vedremo che invece della potenza $x+\xi^{esima}$ della indeterminata ω

possiamo prendere una funzione arbitraria $f(x+\xi)$, giacchè si ha $\omega^{x+\xi}=f(x+\xi)$. Segue di qui che avremo per $z_{x,y}$ la seguente espressione:

$$z_{x,y}=V.f(0)+V'.f(1)+V''.f(2)+\ldots+V^{(x+y)}.f(x+y)$$
$$+'V.f(-1)+''V.f(-2)+\ldots+{}^{(x+y)}V.f(-x-y),$$

la quale contiene una funzione arbitraria $f(x+y)$.
Se si prende nel valore di β del §. 10. il segno $-$ s' avrà per β un altro valore, il quale ci darà una altra espressione per $z_{x,y}$.

$$z_{x,y}=T.\Psi(0)+T'.\Psi(1)+T''.\Psi(2)+\ldots+T^{(x+y)}.\Psi(x+y)$$
$$+'T.\Psi(-1)+''T.\Psi(-2)+\ldots+{}^{(x+y)}T.\Psi(-x-y),$$

la quale contiene un altra funzione arbitraria $\Psi\ (x+y)$: la somma adunque di queste due espressioni di $z_{x,y}$ contenendo due funzioni arbitrarie, rappresenterà perciò l' integrale completo della proposta equazione del secondo ordine, il quale sarà sempre composto di un numero finito di termini. Allorchè si farà l' applicazione di queste Teorie, ci tratteremo sopra i metodi di determinare le funzioni arbitrarie che entrano negl' integrali completi, che abbiamo ritrovati. Si vede però facilmente che i valori di quelle funzioni dipendono dai valori di $z_{x,y}$ quando una delle variabili y è zero.

§. 12. Il metodo che abbiamo adoprato per avere l' integrale completo in termini finiti delle equazioni del secondo ordine, non può adoprarsi per gl' ordini superiori; in fatti se si trattasse di quelle del terzo, (e ciò che dico di questo vale per gl' altri) avendosi fra α e β una equazio-

ne del terzo grado, s' avrebbero per β dei valori i quali conterrebbero le radici cube di una quantità complessa di questa forma $\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$, e perchè queste sparissero bisognerebbe che si potesse per α prendere tal numero da rendere quella quantità complessa un cubo perfetto: ora l'analisi degl' indeterminati non è spinta tanto oltre per sodisfare a questa ricerca, e perciò non potendo eliminare i radicali dal valore di β, la potenza β^y ridotta in serie secondo le potenze di α, conterrebbe un numero infinito di termini: così il metodo precedente non è limitato che all' equazioni di secondo ordine.

Quello che andiamo ad esporre s' estende alle equazioni di tutti gl' ordini e unisce al vantaggio di dare sempre gl' integrali finiti, l' altro di rendere la determinazione delle funzioni arbitrarie facilissima in tutti i casi.

§. 13. L' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo} riportata al (§. 7.) facendovi $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y$ ci conduce alla seguente equazione del grado n^{esimo} fra α e β

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} A+B\alpha+C\alpha^2+\ldots+N\alpha^n \\ \quad +B'\beta+C'\alpha\beta+\ldots+N'\alpha^{n-1}\beta \\ \qquad +C''\beta^2+\ldots+N''\alpha^{n-2}\beta^2 \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +N^{(n)}\beta^n \end{array}\right\}=0$$

con la quale conviene determinare β in α.

Siccome

Siccome in generale non si può esprimere β in potenze di α, che per una serie infinita, non si potrà perciò avere il valore di β^y che espresso per una serie parimente infinita: ora si osservi che si può ridurre questo valore di β^y ad una serie razionale e finita di termini ordinati secondo le potenze di α, purchè vi si ammettano le potenze di β inferiori a β^n; poichè se si prende il valore di β^n dato per l' equazione precedente, esso sarà espresso per le potenze β^{n-1} e sue inferiori: se questa espressione si moltiplica per β s' avrà per β^{n+1} una espressione, che conterrà β^n e le sue potenze inferiori, nella quale sostituendovi l' espressione trovata per β^n, verrà per β^{n+1} una espressione la quale conterrà le potenze β^{n-1} e le sue inferiori; l' espressione trovata per β^{n+1} moltiplicandola per β, e sostituendovi per β^n il suo valore, s' avrà β^{n+2} dato per α e per β, ma le potenze del β non saranno maggiori di β^{n-1}: continuando questo ragionamento si vede che potremo avere qualunque potenza β^y espressa per una funzione algebraica finita e razionale di α e β, nella quale le potenze di β non passeranno le $n-1$ *esime*, e avrà perciò questa forma

$$\beta^y = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + \dots + T^{(y)}\alpha^y$$

$$+ T1.\beta + T1'.\alpha\beta + T1''.\alpha^2\beta + \dots + T1^{(y-1)}.\alpha^{y-1}\beta$$

(2) $$+ T2.\beta^2 + T2'.\alpha\beta^2 + T2''.\alpha^2\beta^2 + \dots + T2^{(y-2)}.\alpha^{y-2}\beta^2$$

$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$+ T(n-1).\beta^{n-1} + T(n-1)'.\alpha\beta^{n-1} + \dots + T(n-1)^{(y-n+1)} \times$$

$\alpha^{y-n+1}\beta^{n-1}$; ove i coefficienti T, T', T'' ec. $T1'$, ec. saranno delle funzioni razionali date di y e dei coefficienti dell' equazione proposta.

Se questa espressione di β^y si moltiplica per α^x s' avrà allora l'espressione finita di $\beta^y\alpha^x$, che sarà il valore di $z_{x,y}$ il quale sarà in conseguenza così espresso

$$z_{x,y} = T.\alpha^x + T'.\alpha^{x+1} + \dots + T^{(y)}.\alpha^{x+y}$$

$$+ T1.\alpha^x\beta + T1'\alpha^{x+1}\beta + \dots + T1^{(y-1)}.\alpha^{x+y-1}\beta$$

$$+ T2.\alpha^x\beta^2 + T2'.\alpha^{x+1}.\beta^2 + \dots + T2^{(y-2)}.\alpha^{x+y-2}\beta^2$$

$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$+ T(n-1).\alpha^x\beta^{n-1} + T(n-1)'.\alpha^{x+1}\beta^{n-1} + \dots + T(n-1)^{(y-n+1)} \times$$

$$\alpha^{x+y-n+1}\beta^{n-1}.$$

§. 14. Ora siccome $\alpha^x \beta^y = z_{x,y}$ è facile vedere che s'avrà

$$\alpha^x = z_{x,0},\ \alpha^{x+1} = z_{x+1,0},\ \text{ec. } \alpha^{x+y} = z_{x+y,0}$$

$$\alpha^x \beta = z_{x,1},\ \alpha^{x+1} \beta = z_{x+1,1},\ \text{ec. } \alpha^{x+y-1} \beta = z_{x+y-1,1}$$

. . . .

$$\alpha^x \beta^{n-1} = z_{x,n-1},\ \alpha^{x+1} \beta^{n-1} = z_{x+1,n-1},\ \text{ec. } \alpha^{x+y-n+1} \beta^{n-1} =$$

$z_{x+y-n+1,n-1}$ e perciò il valore di $z_{x,y}$ o l'integrale completo dell'equazione proposta sarà

$$z_{x,y} = \mathrm{T} z_{x,0} + \mathrm{T}' z_{x+1,0} + \ldots + \mathrm{T}^{(y)} z_{x+y,0}$$

$$+ \mathrm{T1}.z_{x,1} + \mathrm{T1}'.z_{x+1,1} + \ldots + \mathrm{T1}^{(y-1)} z_{x+y-1,1}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ \mathrm{T}(n-1).z_{x,n-1} + \mathrm{T}(n-1)'.z_{x+1,n-1} + \ldots \ldots +$$

$$\mathrm{T}(n-1)^{(y-n+1)}.z_{x+y-n+1,n-1}.$$

Si ricava di quì che per la risoluzione del problema, cioè per conoscere effettivamente il valore di $z_{x,y}$, conviene che

siano dati dalla natura del problema stesso i valori $z_{x,y}$ quando $y=1,2,3,4$, ec., $n-1$ perchè questi rimangono indeterminati.

L' espressione trovata per $z_{x,y}$ l' abbiamo chiamata l' integrale completo dell' equazione proposta, perchè i valori di $z_{x,0}$, $z_{x,1}$, $z_{x,2}$ ec. essendo indipendenti fra loro e rimanendo al nostro arbitrio, possono perciò rappresentarsi per altrettante funzioni di x, come $f(x)$, $f1(x)$ ec. parimente indipendenti fra loro e arbitrarie: l' espressione allora di $z_{x,y}$ diviene

$$z_{x,y} = T.f(x) + T'.f(x+1) + T''.f(x+2) + \ldots + T^{(y)}.f(x+y)$$
$$+ T1.f1(x) + T1'.f1(x+1) + \ldots + T1^{(y-1)}.f1(x+y-1)$$
$$+ T2.f2(x) + T2'.f2(x+1) + \ldots + T2^{(y-2)}.f2(x+y-2)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ T(n-1).f(n-1)(x) + T(n-1)'.f(n-1)(x+1) + \ldots + T(n-1)^{(y-n+1)}.f(n-1)(x+y-n+1),$$

le funzioni arbitrarie contenute in questa formula sono di numero n.

§. 15. Vediamo adesso come possano determinarsi i coefficienti T, T', ec. T1', T1'', ec.

Se dall' equazione (1) del §. 13. si ricava il valore di β in α, si sostituisce nell' equazione (2) e dopo avere ordinati i termini secondo le potenze di α si facciano eguali a zero i coefficienti delle stesse potenze, s' avrà una serie d' equazioni, per le quali si potranno determinare i coefficienti ricercati T, T', ec. T1, T1', ec.

La considerazione delle differenti radici dell' equazione può ancora semplicizzare questo metodo: infatti se all' equazione (2) si dà questa forma

$\beta^y = A + A1 . \beta + A2 . \beta^2 + \ldots + A(n-1) . \beta^{n-1}$, A essendo un numero polinomio in α del grado y; A1 un altro polinomio in α del grado $y-1$, e così di seguito, e s' indica per β', β'', ec. le n radici dell' equazione (1) ordinata per rapporto a β, s' avranno queste n equazioni differenti

$$\beta'^y = A + A1 . \beta' + A2 . \beta'^2 + \ldots + A(n-1) . \beta'^{n-1}$$

$$\beta''^y = A + A1 . \beta'' + A2 . \beta''^2 + \ldots + A(n-1) . \beta''^{n-1}$$

ec. ec.

Per mezzo delle quali si determineranno separatamente le n quantità A, A1, A2, ec. in β', β'', ec. allora servirà sostituire in luogo di β', β'', ec. i loro valori in α ridotti in serie ascendente e spinti solamente fino alla y^{esima} potenza per la quantità A, fino alla $(y-1)^{esima}$ per la quantità A1, e così di seguito.

§. 16. Ma per fare una applicazione di questa Teoria, supponghiamo che l' equazione da integrarsi sia di secondo grado, quella cioè che abbiamo proposto al §. 3. s' avrà in questo caso $n = 2$; e perciò l' espressione del (§. 12.) per $z_{x,y}$ sarà

$z_{x,y} = T.f(x) + T'f(x+1) + T''f(x+2) + \ldots +$
$T^{(y)}f(x+y)$
$+ T1.f1(x) + T1'.f1(x+1) + T1''.f1(x+2) + \ldots +$
$T1^{(y-1)}.f1(x+y-1)$ la quale ne rappresenterà l'integrale completo.

Per determinare i coefficienti T., T', ec. secondo ciò che abbiamo detto al (§. 15.) avremo

$\beta^y = A + A1.\beta$, nella quale è

$A = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + \ldots + T^{(y)}\alpha^y$

$A1 = T1 + T1'.\alpha + T1''.\alpha^2 + \ldots + T1^{(y-1)}.\alpha^{y-1}$: ora al §. 10. abbiamo trovato per β', β'' due valori di questa forma

$\beta' = a\alpha + b + \sqrt{m\alpha^2 + n\alpha + p}$

$\beta'' = a\alpha + b - \sqrt{m\alpha^2 + n\alpha + p}$ i quali ci danno queste due equazioni

$\beta'^y = A + A1.\beta'$

$\beta''^y = A + A1.\beta''$, da cui si ricava

$$T + T'\alpha + T''\alpha^2 + \ldots + T^{(y)}\alpha^y = A = \frac{\beta''\beta'^y - \beta'\beta''^y}{\beta'' - \beta'}$$

$$T1 + T1'\alpha + T1''\alpha^2 + \ldots + T1.^{(y-1)}\alpha^{y-1} = A1 = \frac{\beta'^y - \beta''^y}{\beta' - \beta''},$$

Se ora si suppone che per β', β'' si sostituiscano i di loro valori, e le espressioni che ne vengono allora per A, A1 si riducano in serie ordinate secondo le potenze di α, le quali siano

$$a + a'\alpha + a''\alpha^2 + \ldots + a^{(y)}\alpha^{y} + a^{(y+1)}\alpha^{y+1} + \text{ec.}$$

$$b + b'\alpha + b''\alpha^2 + \ldots + b^{(y)}\alpha^{y} + b^{(y+1)}\alpha^{y+1} + \text{ec.}$$ (le quantità a, a' ec., b, b' ec. sono funzioni cognite di y che si determinano per mezzo della formola Neuttoniana) continuata la prima fino alla potenza α^{y} inclusive ci darà il valore di A, e continuata la seconda fino alla potenza α^{y-1} inclusive ci darà il valore di A1; quindi per il paragone delle potenze omologhe di α avremo $T = a$, $T' = a'$, ec. $T1 = b$, $T1' = b'$ ec.

§. 17. Anzi se saranno determinati per questo metodo o per qualunque altro i primi termini T, T1, T2, ec. T$(n-1)$ dei polinomi A, A1, A2, ec. si potranno trovare tutti i seguenti in una maniera più semplice, cercando con l'ajuto del calcolo differenziale la legge che deve regnare fra di loro: ciò che andiamo a dire è generale per l'equazione di qualunque ordine quantunque noi lo applichiamo alle equazioni del secondo ordine di cui si è quì sopra parlato.
Si differenzi logaritmicamente l'equazione

$\beta^{y} = A + A1 . \beta$, riguardando α e β solo come variabili, avremo

$\frac{y d\beta}{\beta} = \frac{dA + \beta dA1 + A1 . d\beta}{A + A1 . \beta}$: ora differenziando l'equazione che

regna fra α e β (§. 3.) s' avrà per $d\beta$ questo valore

$d\beta = \frac{-C'\beta + B + 2C\alpha}{B' + C'\alpha + 2C''\beta} d\alpha$, egualmente prendendo i valori di dA,

$dA1$, s' avrà

$$dA=(T'+2T''\alpha+3T'''\alpha^2+\ldots+yT^{(y)}\alpha^{y-1})d\alpha$$

$$dA1=(T1'+2T1''.\alpha+3T1'''.\alpha^2+\ldots+(y-1)T1^{(y-1)}\alpha^{y-2})d\alpha$$

sostituendo ora questi valori nell' equazione differenziale e dividendo per $d\alpha$ avremo dopo averla ridotta senza denominatori

$$\Big(\beta(1-y)(T'+T1'.\alpha+T1''.\alpha^2+\ldots+T1^{(y-1)}.\alpha^{y-1})-y(T+T'\alpha+T''\alpha^2+\ldots+T^{(y)}\alpha^{y})\Big)\Big(B+2C\alpha+C'\beta\Big)=\beta(B'+C'\alpha+2C''\beta)\Big(T'+2T''\alpha+\ldots+yT^{(y)}\alpha^{y-1}+\beta(T1'+2T1''.\alpha+\ldots+(y-1)T^{(y-1)}\alpha^{y-2})\Big):$$ questa equazione contiene le potenze terze di β: ora l' equazione fra α e β del §. 3. da per β^2 questo valore

$$\beta^2=-\frac{1}{C''}(A+B\alpha+C\alpha^2+B'\beta+C'\alpha\beta)$$ e per β^3 questo

$$\beta^3=-\frac{1}{C''}\Big(A\beta+B\alpha\beta+C\alpha^2\beta+(B'+C'\alpha)(-\frac{1}{C''}(A+B\alpha+C\alpha^2+B'\beta+C'\alpha\beta))\Big).$$

Se si sostituiscono questi due valori di β^2, β^3 nell' equazione superiore è chiaro che essa non conterrà altro che le potenze β^0, β^1 di β; e siccome l' equazione deve allora divenire identica per l' eguaglianza dei due valori di $d\beta$ che l' hanno portata, così dovremo eguagliare a zero il coefficiente di β^0 e quello di β^1.

Queste equazioni dovendo avere luogo qualunque sia la quantità α, si potranno eguagliare a zero i coefficienti delle potenze omologhe di α, e l' avranno allora l' equazioni necessarie

sarie alla determinazione dei coefficienti T', T'', ec. $T1'$, $T1''$, ec. L' applicazioni che ne faremo schiariranno sempre più la Teorìa

§. 18. La sostituzione di $\alpha^x \beta^y$ invece di $z_{x,y}$ nella equazione generale a differenze finite e parziali del grado n riportata al §. 7., ci dà una equazione, la quale ordinata secondo le potenze di β è della seguente forma

$$(1) \qquad A\beta^y + A1 . \beta^{y+1} + A2 . \beta^{y+2} + \ldots + A(n) . \beta^{y+n} = 0$$

ovvero ordinata secondo le potenze di α è di questa altra forma

$$(2) \qquad B . \alpha^x + B1 . \alpha^{x+1} + B2 . \alpha^{x+2} + \ldots + B(n) . \alpha^{x+n} = 0$$

e queste due equazioni non sono in sostanza che la medesima.

Ora la prima da n valori diversi per β espressi in α, e siano β, β', β'', ec., e la seconda da n diversi valori di α espressi in β, e siano $\alpha, \alpha', \alpha''$, ec., così di qualunque ci serviamo di queste equazioni, avremo sempre n espressioni diverse di $\alpha^x \beta^y$ e perciò di $z_{x,y}$. Perciò in ciascuna di queste espressioni introducendo con l' artifizio di cui sopra ci siamo serviti una funzione arbitraria, la somma di quelle medesime espressioni darà l' integrale completo dell' equazione proposta. Ma se l' equazione fra α e β avesse alcune delle radici eguali, è evidente che il numero delle espressioni diverse di $\alpha^x \beta^y$ scemerebbe di tante unità quanto è il numero delle radici eguali meno una, e che in conseguenza l' integrale si troverebbe incompleto. Vediamo come si

potrà ricompletare il numero di queste espressioni diverse. Avvertiamo prima che l' equazione (1) ha un numero m di radici eguali in α, cioè se $\beta=\beta'=\beta''=\ldots=\beta^{(m-1)}$, l' equazione (2) avrà il medesimo numero di radici eguali in β, cioè $\alpha=\alpha'=\alpha''=\ldots=\alpha^{(m-1)}$.

§. 19. Ora se nell' equazione (1) due radici per esempio β, β' sono eguali una di queste soddisfà come si è detto (§. 25. e *seg.* Cap. 1.) nel medesimo tempo a quella equazione e a questa (1)'

$$(1)' \ldots y A \beta^{y-1} + (y+1) A1 . \beta^{y} + (y+2) A2 . \beta^{y+2} + \ldots +$$

$$(y+n) A(n) . \beta^{y+n-1} = 0;$$ e se tre sono le radici eguali β, β', β'', una di queste soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni (1), (1)' superiori e a questa (1)''

$$(1)'' \ldots y(y-1) A\beta^{y-2} + (y+1) y A1 . \beta^{y-1} + \ldots +$$

$$(y+n)(y+n-1) A(n) . \beta^{y+n-2} = 0$$ e così di seguito.

L' equazione (1)' si ricava dall' equazione (1) moltiplicando ciascun termine di questa ultima equazione per l' esponente che vi ha β, e quindi dividendo per β, e nella medesima guisa si ricava l' equazione (1)'' dall' equazione (1)'. E siccome se sono eguali tre radici β, β', β'' dell' equazione (1) lo sono anche tre $\alpha, \alpha', \alpha''$ dell' equazione (2); perciò una di queste soddisfarà nel tempo stesso che all' equazione (2) alle seguenti (2)', (2)''

$$(2)' \ldots x B \alpha^{x-1} + (x+1) B1 . \alpha^{x} + (x+2) B2 . \alpha^{x+1} + \ldots +$$

$$(x+n) B(n) . \alpha^{x+n-1} = 0$$

$(2)''$ . . . $x(x-1)B\alpha^{x-2} + (x+1)xB1.\alpha^{x-1} + \ldots +$

$(x+n)(x+n-1)B(n).\alpha^{x+n-2} = 0$; e così le sei equazioni $(1), (1)', (1)'', (2), (2)', (2)''$ saranno sempre soddisfatte nel medesimo tempo da una delle radici eguali.

§. 20. Si vede adunque che se due sono le radici eguali dell' equazione (1) soddisfà alla proposta tanto $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, quanto $z_{x,y} = y\alpha^x \beta^{y-1}$, purchè β sia una di queste due radici eguali; infatti sostituito questo secondo valore nell' equazione generale del §. 7., esso la muta nell' equazione $(1)'$, che è soddisfatta egualmente; così nel caso di tre radici eguali si potranno prendere per $z_{x,y}$ queste tre espressioni

$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$;

$z_{x,y} = y\alpha^x \beta^{y-1}$,

$z_{x,y} = y(y-1)\alpha^x \beta^{y-2}$ essendo β una di queste tre radici eguali; poichè questo ultimo valore sostituito nell' equazione del §. 7., la riduce all' equazione $(1)''$ che è soddisfatta quando lo è l' equazione (1) da una di quelle stesse radici eguali.

Se le radici eguali fossero quattro s' avrebbe anche

$z_{x,y} = y(y-1)(y-2)\alpha^x \beta^{y-3}$ e così di seguito; e siccome

le espressioni di $z_{x,y}$ possono essere moltiplicate per una costante qualunque C, la quale entrando come moltiplicatore in tutti i termini dell' equazione del §. 7., svanisce e rimane indeterminata, così se questa costante si suppone eguale all' unità nel primo valore di $z_{x,y}$, eguale a β nel secondo, a β^2 nel terzo, ec. avremo per $z_{x,y}$ nel caso delle radici eguali le seguenti espressioni $\alpha^x\beta^y$, $y\alpha^x\beta^y$, $y(y-1)\alpha^x\beta^y$, $y(y-1)(y-2)\alpha^x\beta^y$, ec.

Facendo per α il medesimo ragionamento, è manifesto che avremo ancora quest' altre espressioni per $z_{x,y}$, $\alpha^x\beta^y$, $x\alpha^x\beta^y$, $x(x-1)\alpha^x\beta^y$, $x(x-1)(x-2)\alpha^x\beta^y$, ec.

§. 21. Si potrebbero ancora trovare altri valori per $z_{x,y}$ nel caso delle radici eguali. Infatti quando le radici eguali sono tre $\beta=\beta'=\beta''$, $\alpha=\alpha'=\alpha''$, ec. è manifesto che l' equazione $(1)'$ conterrà due di queste radici eguali $\alpha\beta$; e perciò ordinata per α ancora due radici eguali ad α.
Se ora in questa equazione $(1)'$ ordinata che sia per le potenze di α si moltiplicano i termini per gl' esponenti $x, x+1$, ec. $x+n$ di quelle potenze medesime di α, avremo una equazione (a) che sarà soddisfatta nel medesimo tempo che le equazioni $(1), (1)'$, e si vedrà facilmente che se facciamo $z_{x,y}=xy\alpha^x\beta^y$ e tale valore di $z_{x,y}$ si sostituisce nella proposta, la si trasforma nell' equazione (a), la quale essen-

do soddisfatta da una delle radici eguali, ci mostra essere $\alpha^x \beta^y$ un' altra espressione della variabile $z_{x,y}$. Queste diverse espressioni serviranno sempre a riportare completo l' integrale della proposta, quando le radici eguali lo avranno ridotto incompleto.

Ci siamo ancora in questo caso dispensati dal fare uso del metodo del Sig. d' Alambert, di cui si è parlato al §. 22. e segg. Cap. I.

§. 22. Se in una funzione $z_{x,y}$ di due variabili x,y si suppone una di esse variabili per esempio $y=0$, e si fa $x=0, 1, 2, 3$, ec. si avrà questa serie di quantità $z_{0,0}$, $z_{1,0}$, $z_{2,0}$, ec. Parimente se supponendo $y=1$, si fa $x=0$, 1, 2, 3, ec. s' avrà un altra serie di queste quantità $z_{0,1}$, $z_{1,1}$, $z_{2,1}$ ec. e così di seguito: ora tutte queste diverse serie si possono disporre nella tavola seguente, nella quale gl' indici verticali, o la colonna verticale dei numeri naturali indicano il valore che ha la y nella serie che gli corrisponde, e gl' indici orizzontali indicano il valore che ha la x nei termini che sono sotto di essi.

Indici Orizzontali		0	1	2	3 . : .	x	$x+1$,	ec.
	0	$z_{0,0}$	$z_{1,0}$	$z_{2,0}$	$z_{3,0}$ . . .	$z_{x,0}$	$z_{x+1,0}$	ec.
	1	$z_{0,1}$	$z_{1,1}$	$z_{2,1}$	$z_{3,1}$ . . .	$z_{x,1}$	$z_{x+1,1}$	ec.
Indici Verticali	2	$z_{0,2}$	$z_{1,2}$	$z_{2,2}$	$z_{3,2}$ . . .	$z_{x,2}$	$z_{x+1,2}$	ec.
		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	y	$z_{0,y}$	$z_{1,y}$	$z_{2,y}$	. . . .	$z_{x,y}$	$z_{x+1,y}$	ec.
	$y+1$	$z_{0,y+1}$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	ec.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Si vede adunque che ciascuno termine di questa tavola per esempio $z_{3,2}$ è una funzione del suoi indici 3, 2 come $z_{x,y}$ è una simil funzione degl' indici x e y. Se pertanto si conosce il valore di $z_{x,y}$ è chiaro che si potranno avere tutti i termini di quella Tavola, facendovi x e y eguali agl' indici che appartengono ai termini che si ricercano. Quando però non conoscendosi il valore di $z_{x,y}$ si conosce la legge con la quale i termini di quella tavola sono formati, o che lega quei termini stessi fra loro, e si ricerca il valore di $z_{x,y}$ (che si chiama il termine generale di quella Tavola) per quindi trovare tutti gl' altri termini, conviene allora ricorrere al calcolo integrale delle differenze finite e parziali.

Se la legge con la quale sono formati i termini è tale, che uno qualunque $z_{x,y}$ dipenda da alcuni degl' altri termini che lo precedono o che lo seguono tanto nelle file orizzontali, che verticali, la Tavola rappresenta allora la formola generale di quelle serie che si chiamano *Recurro - Recurrenti*. E' dunque evidente che esprimendo questa dipendenza per una equazione fra esso termine $z_{x,y}$ e gl' altri, tale equazione sarà a differenze finite e parziali; e dall' integrazione di questa dipenderà la ricerca del termine generale $z_{x,y}$. Se questa equazione è lineare ella cade nella classe di quelle che abbiamo trattate. Ponendo adesso mente a quel che abbiamo detto al §. 16. si vedrà che nell' applicazioni le quali andiamo a fare, la determinazione delle funzioni arbitrarie dipende dai valori particolari di $z_{x,y}$ quando una variabile ha dei valori fissi e determinati, cioè dai valori di alcune file di termini della serie recurro-recurrente, le quali perciò dovranno essere date: tutto si comprenderà anche meglio per mezzo d' alcuni esempi.

§. 23. Prendiamo per primo esempio la seguente serie recurro - recurrente,

	0	1	2	3	4 x
0	0	2	4	6	8 . . . . $2x$
1	2	8	14	20	26 . . . .
2	12	30	48	66	84 . . . .
3	54	108	162	216	
4	216	378	540		
⋮	. . . .				
y	. . . .				

nella quale un termine qualunque $z_{x,y}$ è eguale al doppio del suo termine superiore $z_{x,y-1}$ più il termine $z_{x+1,y-1}$ che segue questo superiore medesimo.

Ponendo questa condizione in equazione, s' avrà

$z_{x,y}=2z_{x,y-1}+z_{x+1,y-1}$ equazione lineare a differenze finite e parziali, dall' integrazione della quale dipende il valore del termine generale $z_{x,y}$. Se in questa equazione si fa crescere la y di una unità, e si pongono tutti i termini in un sol membro, s' avrà

$2z_{x,y}+z_{x+1,y}-z_{x,y+1}=0$. Questa equazione che è del primo ordine paragonata con quella del §. 2., ci dà $a=2$, $b=1$, onde avremo per $z_{x,y}$ queste due espressioni

$$z_{x,y}=2^y\varphi(x)+y2^{y-1}\varphi(x+1)+y\left(\frac{y-1}{2}\right)2^{y-2}\varphi(x+2)+\ldots+\varphi(x+y)$$

$$z_{x,y}=\Psi(x+y)-x.2\Psi(x+y-1)+x\left(\frac{x-1}{2}\right).2^2\Psi(x+y-2)+\ldots+2^x\Psi(y);$$

e se si osserva che $\varphi(x)$ si è preso per rappresentare $z_{x,0}$, e $\Psi(y)$ per $z_{0,y}$ s' avrà

$$z_{x,y}=2^y z_{x,0}+y.2^{y-1}z_{x+1,0}+y\left(\frac{y-1}{2}\right)2^{y-2}.z_{x+2,0}+\ldots+z_{x+y,0}$$

$z_{x,y}=$

$$z_{x,y} = z_{0,x+y} - x.2.z_{0,x+y-1} + x\left(\frac{x-1}{2}\right).2^2.z_{0,x+y-2} + \ldots +$$
$$2^x.z_{0,y}.$$

Servendosi adunque della prima formola è necessario che siano dati i termini della prima fila orizzontale; e adoprando la seconda, quegli della prima verticale. Anzi siccome nei termini della prima fila orizzontale si ha in generale $z_{x,0} = 2x$, così la prima espressione di $z_{x,y}$ sarà

$$z_{x,y} = 2^y.2x + y.2^{y-1}.2(x+1) + y.\left(\frac{y-1}{2}\right).2^{y-2}.2(x+2) + \ldots +$$
$$2(x+y).$$

Si voglia per esempio il terzo termine della terza fila orizzontale, cioè $z_{3,3}$: facendo nella formola superiore $x=3$, $y=3$, s'avrà

$$z_{3,3} = 2^3.6 + 3.2^2.8 + 3.2.10 + 12 = 48 + 96 + 60 +$$
$$12 = 216;$$ e così degl' altri.

§. 24. Per secondo esempio cerchiamo il termine generale della Tavola di Pascal per le combinazioni, nella quale ciascun termine è eguale alla somma di quello che lo precede nella medesima linea orizzontale, e di quello che è al disopra di quest' ultimo nella medesima linea verticale; dipiù la prima linea orizzontale è sempre formata dall' unità, e la prima verticale è formata da zero.

La legge con cui sono dunque legati i termini di questa tavola, è contenuta in questa equazione

$$z_{x+1,y+1} = z_{x,y+1} + z_{x,y}$$

Paragonata questa equazione con quella del (§. 3.) s' avrà

$A=1$, $B'=1$, $C'=-1$, $B=0$, $C=0$, $C''=0$; onde $\beta=\frac{1}{\alpha-1}$:

questa quantità elevata alla potenza y dà

$$\alpha^{-y}+y\alpha^{-y-1}+\frac{y(y+1)}{2}\alpha^{-y-2}+\frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3}\alpha^{-y-3}+\text{ec.}$$

la quale moltiplicata per α^x e paragonata con la formola generale della serie posta al citato §. ha $\mu=-1$, $T=1$, $T'=y$, $T''=\frac{y(y+1)}{2}$, $T'''=\frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3}$, ec. l'espressione generale dell' integrale sarà adunque

$$z_{x,y}=\varphi(x-y)+y\varphi(x-y-1)+\frac{y(y+1)}{2}\varphi(x-y-2)+\frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3}\varphi(x-y-3)+\text{ec.};$$ ora per adattarla al nostro caso si rimetta invece di $\varphi(x)$ la quantità $z_{x,0}$ che rappresenta i termini della prima fila orizzontale, ed allora avremo

$$z_{x,y}=z_{x-y,0}+\frac{y(y+1)}{2}z_{x-y-2,0}+\frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3}z_{x-y-3,0}+\ldots+\frac{y(y+1)(y+2)\ldots\ldots(x-1)}{2\cdot 3\ldots\ldots(x-y)}z_{0,0}+\text{ec.},$$ ma è facile di vedere che gl' altri termini dopo $z_{0,0}$ vanno tutti a zero, e la formola finisce a quel termine; poichè se si fa in essa $x=0$, avremo

$$z_{0,y}=z_{-y,0}+yz_{-y-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}z_{-y-2,0}+\text{ec.},$$ ora

qualunque sia y è sempre $z_{0,y}$ eguale a zero, dunque qualunque sia y s' avrà

$$0 = z_{-y,0} + y z_{-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{2} z_{-y-2,0} + \text{ec.},$$ dal che si ricava che i termini $z_{\omega,0}$ quando ω è negativo sono tutti zero; e siccome tutti i termini $z_{\omega,0}$ della prima fila quando ω è positivo sono eguali all' unità, perciò il termine generale della proposta Tavola di Pascal sarà

$$z_{x,y} = 1 + y + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3} + \ldots\ldots\ldots +$$
$$\frac{y(y+1)(y+2)\ldots(x-1)}{1.2.3\ldots(x-y)},$$ la qual serie è facile vedere che si riduce a $\frac{(y+1)(y+2)\ldots x}{1.2.3\ldots(x-y)}$.

§. 25. Accade in molti casi che l' integrale completo contiene dei termini $z_{\omega,0}$ i quali quando ω è negativo non sono zerò come erano nell' esempio antecedente: in questo caso quando questi termini non siano dati per la natura del problema, sarà necessario determinarli per mezzo di quelli che già si conoscono. Ciò si potrà conseguire quando, oltre la prima fila orizzontale dei termini, è data ancora la prima verticale; infatti, supponendo che l' equazione la quale regna fra i termini della tavola del §. 22., sia quella del §. 3, quando vi si fa $B'=0$, $C=0$, $C''=0$, avremo (fatto $-\frac{B}{C'}=p$, $\frac{A}{B}=q$) per β, $\beta = p(1+\frac{q}{\alpha})$; e perciò elevando questa quantità alla potenza y, e sostituendo i valori di μ,

T, T′ ec. nella formola dell' integrale ivi trovata, s'avrà per il termine generale di quella stessa tavola

$$z_{x,y}=p^y(z_{x,0}+yq.z_{x-1,0}+\frac{y(y-1)}{2}q^2.z_{x-2,0}+\ldots+q^y.z_{x-y,0})$$: ora è evidente che quando y è maggiore di x, questa formola contiene dei termini di questa specie $z_{-1,0}$, $z_{-2,0}$, ec., i quali se non sono conosciuti si determineranno per mezzo dei termini $z_{0,1}$, $z_{0,2}$ ec. della prima fila verticale in questa guisa.

Si faccia nella formola trovata per il termine generale $x=0$ ed $y=1, 2, 3$, ec. avremo

$$z_{0,1}=p(z_{0,0}+q.z_{-1,0})$$

$$z_{0,2}=p^2(z_{0,0}+2q.z_{-1,0}+q^2.z_{-2,0})$$

$$z_{0,3}=p^3(z_{0,0}+3q.z_{-1,0}+3q^2.z_{-2,0}+q^3.z_{-3,0})$$

ec. ec.

d'onde è facile ricavare

$$q.z_{-1,0}=\frac{1}{p}z_{0,1}-z_{0,0}$$

$$q^2.z_{-2,0}=\frac{1}{p^2}.z_{0,2}-\frac{2}{p}.z_{0,1}+z_{0,0}$$

$$q^3.z_{-3,0}=\frac{1}{p^3}.z_{0,3}-\frac{3}{p^2}.z_{0,2}+\frac{3}{p}.z_{0,1}-z_{0,0}$$

ec.

ed in generale

$$q^s . z_{-s,0} = \frac{1}{p^s} . z_{0,s} - \frac{s}{p^{s-1}} . z_{0,s-1} + \frac{s(s-1)}{2p^{s-2}} . z_{0,s-2} - \text{ec.}$$

si vede adunque che essendo conosciuti i termini della prima fila verticale della serie recurro-recurrente, potranno determinarsi per mezzo di essi i termini della prima fila orizzontale d' indice negativo, i quali compariscono nell' espressione del termine generale della serie medesima.

§. 26. Determiniamo adesso le funzioni arbitrarie contenute nell' integrale dell' equazione

$$Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} = 0$$ avuto in termini finiti col metodo del §. 4., e supponghiamo che questa equazione appartenga ad una serie recurro-recurrente rappresentata generalmente dalla tavola del §. 22.

Abbiamo al §. 5. ritrovato le espressioni di α^x e β^y date per una indeterminata ω; e se in esse si pone invece delle potenze di ω tante funzioni degl' esponenti delle potenze medesime, come si è ivi detto, s' avranno allora le due seguenti espressioni per α^x, β^y e perciò per $z_{x,0}$, $z_{0,y}$

$$z_{x,0} = \alpha^x = m^x (f(x) + xn . f(x-1) + \frac{x(x-1)}{2} n^2 . f(x-2) + \ldots + n^x . f(0))$$

$$z_{0,y} = \beta^y = p^y (f(0) + y . qf(-1) + \frac{y(y-1)}{2} . q^2 . f(-2) + \ldots + q^x f(-y)).$$

Supponghiamo successivamente

$x=0, 1, 2, 3$, ec. s' avrà

$$z_{0,0}=f(0)$$

$$z_{1,0}=m(f(1)+nf(0))$$

$$z_{2,0}=m^2(f(2)+2n.f(1)+n^2f(0))$$

$$z_{3,0}=m^3(f(3)+3n.f(2)+3n^2.f(1)+n^3f(0))$$

ec.

dalle quali si ricava

$$f(0)=z_{0,0}$$

$$\frac{1}{n}f(1)=\frac{1}{mn}z_{1,0}-z_{0,0}$$

$$\frac{1}{n^2}f(2)=\frac{1}{m^2n^2}.z_{2,0}-\frac{2}{mn}.z_{1,0}+z_{0,0}$$

$$\frac{1}{n^3}f(3)=\frac{1}{m^3n^3}.z_{3,0}-\frac{3}{m^2n^2}.z_{2,0}+\frac{3}{mn}.z_{1,0}-z_{0,0}$$

ec.

$$\frac{1}{n^x}f(x)=\frac{1}{m^xn^x}.z_{x,0}-x\frac{1}{m^{x-1}n^{x-1}}.z_{x-1,0}+\frac{x(x-1)}{2}\times$$

$$\frac{1}{m^{x-2}n^{x-2}}.z_{x-2,0}-\text{ec.}\pm z_{0,0}$$

Se adesso supponghiamo successivamente $y=0, 1, 2, 3, 4$, ec. s' avrà

$$z_{0,0}=f(0)$$

$$z_{0,1}=p(f(0)+q.f(-1))$$

$$z_{0,2}=p^2(f(0)+2q.f(-1)+q^2.f(-2))$$

ec.

d' onde si deduce

$$f(0)=z_{0,0}$$

$$q.f(-1)=\frac{1}{p}z_{0,1}-z_{0,0}$$

$$q^2.f(-2)=\frac{1}{p^2}.z_{0,2}-\frac{2}{p}.z_{0,1}+z_{0,0}$$

ec.

$$q^y.f(-y)=\frac{1}{p^y}.z_{0,y}-\frac{y}{p^{y-1}}.z_{0,y-1}+\frac{y(y-1)}{2}.\frac{1}{p^{y-2}}\times$$

$z_{0,y-2}$ − ec. $\pm z_{0,0}$; si prende il segno + ai termini $z_{0,0}$ quando x,y sono pari, il − quando sono impari.

Le funzioni adunque tanto positive che negative sono determinate per mezzo dei termini della serie.

§. 27. Se, per fare una applicazione del metodo del §. 4., si risolve per mezzo di esso l'equazione

$z_{x+1,y+1}=z_{x,y+1}+z_{x,y}$ proposta al §. 24., avremo per il paragone di questa equazione con quella del citato §. 4., $A=1$, $B'=1$, $C'=-1$, $B=0$; e perciò $m=1$, $n=1$,

$p=0$, $q=\infty$, $pq=1$. Di più $z_{0,0}=z_{1,0}=z_{2,0}=$ ec. $=1$

$z_{0,1}=z_{0,2}=z_{0,3}=$ ec. $=0$: sostituendo adunque questi valori nelle superiori formole avremo

$f(0)=1$, $f(1)=1-1=0$, $f(2)=1-2+1=0$, ec. $f(x)=0$

$f(-1)=\frac{1}{1}.0-\frac{1}{\infty}=0$, e così $f(-2)=0$, $f(-3)=0$, ec. $f(-y)=0$:

si vede adunque che di tutti i termini che porta la formola del §. 4. per l' integrale completo in questo caso, solo non sarà zero quello moltiplicato per $f(0)$; ora il coefficiente di $f(0)$ in quella formola è V^x, dunque si ha $z_{x,y}=V^{(x)}$.

Se nel valore di $V^{(s)}$ trovato al §. 5. si fa $s=x$, s' avrà

$$V^{(x)}=m^x p^y \Big(\frac{x(x-1)\ldots.1}{2.3.4\ldots.x}n^x+\frac{x(x-1)\ldots.2}{2.3\ldots.x-1}n^{x-1}.yq+\ldots$$

$$\ldots\frac{x(x-1)\ldots.3}{2.3\ldots.x-2}n^{x-2}.\frac{y(y-1)}{2}q^2+\ldots\ldots+xn\times\ldots\ldots$$

$$\frac{y(y-1)\ldots.y-x+2}{2.3\ldots.x-1}q^{x-1}+\frac{y(y-1)(y-2)\ldots y-x+1}{2.3\ldots.x}q^x\Big)$$

che si riduce alla seguente

$$V^{(x)}=m^x p^y \Big(n^x+xn^{x-1}.yq+\frac{x(x-1)}{2}n^{x-2}.\frac{y(y-1)}{2}q^2+\ldots.$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}n^{x-3}.\frac{y(y-1)(y-2)}{2.3}q^3+\ldots.+xn\times\ldots$$

$$\frac{y(y-1)\ldots y-x+2}{2.3.4\ldots x-1}q^{x-1}+\frac{y(y-1)(y-2)\ldots.y-x+1}{2.3\ldots-x}q^x\Big)$$

ovvero

$V^{(x)}=$

$$V^{(x)} = m^x n^x p^y + x m^x n^{x-1} . y p^y q + \frac{x(x-1)}{2} m^x n^{x-2} \times \ldots$$

$$\frac{y(y-1)}{2} p^y q^2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots x-y+1}{2.3\ldots y} m^x n^{x-y} \times$$

$$\frac{y(y-1)\ldots 1}{2.3\ldots y} p^y q^y + \ldots + xn \frac{y(y-1)\ldots y-x+2}{2.3\ldots x-1} m^x \times$$

$$p^y q^{x-1} + \frac{y(y-1)\ldots y-x+1}{2.3\ldots x} m^x p^y q^x ;$$ e facendo in

questa formola $p = 0$, $q = \infty$, $pq = 1$, $m = n = 1$, s'avrà

$$V^{(x)} = \frac{x(x-1)\ldots x-y+1}{2.3\ldots y},$$ poichè tutti i termini nei quali il p ha una maggiore dimensione del q vanno a zero perchè p è nullo; e quegl'altri nei quali è maggiore la dimensione del q vanno a zero, perchè nei di loro coefficienti vi si trova il fattore $y-y$. Avremo adunque per $z_{x,y}$ questa espressione

$$z_{x,y} = \frac{x(x-1)\ldots x-y+1}{2.3\ldots y}$$ la quale è facile vedere essere la medesima che quella trovata al §. 24.

§. 28. Prendiamo per un altro esempio a integrare l'equazione

$$z_{x,y} = \frac{1}{4} z_{x-1,y+1} + z_{x+1,y-1}.$$

Facendo in questa equazione crescere la x e la y d'una unità, e moltiplicandola tutta per 4, avremo

$z_{x,y+2} - 4z_{x+1,y+1} + 4z_{x+2,y} = 0$ la quale è una equazione di secondo ordine. Paragonata questa equazione con quella del §. 6. si ha $A = B = B' = 0, C = 4, C' = -4, C'' = 1$, onde l'equazione fra α e β da risolversi è

$\beta^2 = -4\beta\alpha + 4\alpha^2 = 0$, la quale da per β due valori eguali a 2α; onde se per β', β'' si rappresentano i due valori di β, si ha $\beta' = \beta'' = 2\alpha$.

Secondo ciò, che abbiamo adunque detto al §. 9., per il caso in cui l'equazione fra α e β di secondo grado è divisibile in due fattori di primo della forma $\beta - a'\alpha, \beta - a''\alpha$, si ha

$z_{x,y} = a'^{y} \varphi'(x+y) + a''^{y} \varphi''(x+y)$; ma per noi essendo

$a' = a'' = 2$, avremo

$z_{x,y} = 2^{y}(\varphi'(x+y) + \varphi''(x+y))$; ora essendo le due funzioni $\varphi'(x+y), \varphi''(x+y)$ arbitrarie, possiamo rappresentare per una funzione arbitraria $\varphi(x+y)$ la somma $\varphi'(x+y) + \varphi''(x+y)$; per questo s'avrà $z_{x,y} = 2^{y} \varphi(x+y)$, integrale incompleto poichè contiene una sola funzione arbitraria: ora abbiamo veduto al §. 20., che nel caso di due radici eguali oltre all'espressione $\alpha^{x} \beta^{y}$ soddisfà alla proposta equazione $y\alpha^{x} \beta^{y}$; perciò facendo $\beta = 2\alpha$, soddisfarà alla nostra equazione $y . 2^{y} . \alpha^{x+y}$ ovvero $y . 2^{y} \varphi'(x+y)$, essendo $\varphi'(x+y)$ una funzione arbitraria diversa da $\varphi(x+y)$: questa ultima

espressione per $z_{x,y}$ sarà un'altro integrale particolare; e se si prende l'aggregato di questi due integrali particolari, s'avrà l'integrale completo di quella proposta equazione

$$z_{x,y} = 2^y \varphi(x+y) + 2^y . y\varphi'(x+y).$$

§. 29. Se l'equazione da integrarsi fosse stata $z_{x,y+2} - 5z_{x+1,y+1} + 6z_{x+2,y} = 0$ avremmo avuto fra α e β questa equazione

$\beta^2 - 5\alpha\beta + 6\alpha^2 = 0$, la quale si scioglie in questi due fattori $\beta - 2\alpha$, $\beta - 3\alpha$, e perciò secondo ciò che si è detto al §. 9. si ha per l'integrale

$z_{x,y} = 3^y \varphi(x+y) + 2^y \varphi'(x+y)$, il quale è completo perchè contiene due funzioni arbitrarie.

Se si adoprasse il motodo del §. 16., facendo $\beta' = 2\alpha$, $\beta'' = 3\alpha$, s'avrebbe

$A = \frac{(3 . 2^y - 2 . 3^y)\alpha^{y+1}}{3\alpha - 2\alpha}$, $A1 = \frac{(3^y - 2^y)\alpha^y}{3\alpha - 2\alpha}$, cioè

$A = (3 . 2^y - 2 . 3^y)\alpha^y$, $A1 = (3^y - 2^y)\alpha^{y-1}$; è dunque evidente che s'avrà

$T = T' = T'' = \text{ec.} = 0$, $T^{(y)} = 3 . 2^y - 2 . 3^y$,

$T1 = T1' = T1'' = \text{ec.} = 0$, $T1^{(y-1)} = 3^y - 2^y$, e perciò l'integrale completo secondo questo metodo, sarà

$z_{x,y} = T^{(y)} . f(x+y) + T1^{(y-1)} . f1(x+y-1)$; e ponendo

per $T^{(y)}$, $T1^{(y-1)}$ i di loro valori, s' avrà

$$z_{x,y} = (3.2^y - 2.3^y) f(x+y) + (3^y - 2^y) f1(x+y-1),$$ il

quale è completo perchè contiene due funzioni arbitrarie. E' facile vedere che a questo integrale si può dare la stessa forma di quello trovato quì sopra col metodo del §. 9. infatti si ha

$$z_{x,y} = 3^y (f1(x+y-1) - 2f(x+y)) + 2^y (3.f(x+y) - f1 \times (x+y-1)).$$ Ora ponendo per $f1(x+y-1) - 2f(x+y)$

un' altra funzione $\varphi(x+y)$; e invece di $3f(x+y) - f1 \times (x+y-1)$ una funzione $\varphi'(x+y)$, avremo

$$z_{x,y} = 3^y \varphi(x+y) + 2^y \varphi'(x+y),$$ come sopra.

§. 30. Passiamo adesso a parlare delle equazioni lineari a differenze finite e parziali a più funzioui variabili $z_{x,y}$, $u_{x,y}$, $\omega_{x,y}$ ec. Se fra queste funzioni si hanno tante equazioni quante sono quelle funzioni medesime, ecco come si tratteranno.

Si faccia $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, $u_{x,y} = a\alpha^x \beta^y$, $\omega_{x,y} = b\alpha^x \beta^y$, ec. essendo a, b, ec. costanti da determinarsi: se si sostituissero questi valori nelle equazioni che fossero proposte, e si dividessero ciascuna per il fattore comune $\alpha^x \beta^y$, s' avrebbe in α, β, a, b, ec. tante equazioni, quante sono le costanti a, b, ec. più una; se adunque per mezzo di queste equazioni s' eliminassero queste stesse costanti, la qual cosa facilmente si eseguirebbe per esservi dette costanti sotto la forma linea-

te, avremmo una equazione finita fra α e β, la quale servirebbe a determinare una di queste costanti α, β per mezzo dell' altra. Potremmo adunque trovare, secondo ciò che è stato detto sopra, il valore di $\alpha^x \beta^y$ e perciò l' espressione completa per $z_{x,y}$, e quindi moltiplicata questa per a, b, ec., s' avrebbero le espressioni di $u_{x,y}$, $v_{x,y}$, ec.

Noi rimandiamo i nostri leggitori all' opera del Sig. La-Grange citato (§. 2.).

§. 31. A questa istessa opera gli rimandiamo per l' integrazione delle equazioni a differenze finite fra quattro variabili $x, y, u, z_{x,y,u}$ ed è certo che avendo ben compreso ciò che si è detto sopra, essi non troveranno alcuna difficoltà nel comprendere tutto quello che riguarda l' integrazione di tali equazioni; solo qui parleremo di una equazione del primo ordine.

Si proponga adunque per integrarsi l' equazione

$$Az_{x,y,u} + Bz_{x+1,y,u} + Cz_{x,y+1,u} + Dz_{x,y,u+1} = 0.$$

Si faccia $z_{x,y,u} = \alpha^x \beta^y \gamma^u$; α, β, γ sono quantità costanti da determinarsi. Se si sostituisce il valore di $z_{x,y,u}$ nella proposta s' avrà, dopo averla divisa per $\alpha^x \beta^y \gamma^u$,

$A + B\alpha + C\beta + D\gamma = 0$, dalla quale si ricava $\gamma = a + b\alpha + c\beta$, avendo fatto $-\frac{A}{D} = a$, $-\frac{B}{D} = b$, $-\frac{C}{D} = c$: onde

$$z_{x,y,u} = \alpha^x \beta^y (a + b\alpha + c\beta)^u.$$

Ora è manifesto che si potrà svolgere la quantità $(a + b\alpha + c\beta)^u$ in una serie finita di termini, ordinata secondo i prodotti delle quantità indeterminate α, β. Sia pertanto $T\alpha^m \beta^n$ uno di questi termini, il termine corrispondente nell'espressione $\alpha^x \beta^y (a + b\alpha + c\beta)^u$ sarà $T\alpha^{x+m} \beta^{y+n}$: ora facendo $u = 0$ si ha

$$z_{x,y,0} = \alpha^x \beta^y \text{ e in generale}$$

$$z_{x+m,y+n,0} = \alpha^{x+m} \beta^{y+n},$$ perciò rimanendo α e β indeterminate, sarà ancora indeterminato il valore di z quando u è zero; potrà perciò essere rappresentato da qualunque funzione $\varphi(x,y)$ delle variabili x e y, onde potremo porre, invece di $z_{x+m,y+n,0}$, $\varphi^{(x+m,y+n)}$; nella serie adunque che esprime la quantità $\alpha^x \beta^y (a + b\alpha + c\beta)$, invece del termine $T\alpha^{x+m} \beta^{y+n}$ si avrà $T\varphi(x+m, y+n)$; una tale espressione per $z_{x,y,u}$ sarà l'integrale completo della proposta poichè conterrà una funzione arbitraria φ.

§. 32. Noi abbiamo fin ora supposto col Sig. La-Grange che nell'equazione proposta al §. 7., posti da una parte tutti i termini nei quali vi è la funzione variabile z, dall'altra non vi fosse che zero. E' facile vedere come si possa

avere l'integrale della detta equazione quando un membro sia eguale a X, anzi quando sia X+Y, essendo X e Y respettive funzioni di x e di y: infatti se facciamo

$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y + u_x + \omega_y$, essendo α, β due costanti indeterminate, u_x una funzione di x, e ω_y una funzione di y ambedue da determinarsi, e si sostituisca questo valore di $z_{x,y}$ nella proposta, avremo fra α e β la medesima equazione che al §. 13., e per determinare u_x, ω_y le due equazioni a differenze finite

$$(1) \ldots a.u_x + bu_{x+1} + cu_{x+2} + \ldots + pu_{x+n} = X$$

$$(2) \ldots a'\omega_y + b'\omega_{y+1} + c'\omega_{y+2} + \ldots + p\omega_{y+n} = Y$$

Dall' integrazione della prima si ricava u_x, e da quella della seconda ω_y. I coefficienti poi di queste due equazioni sono costanti, perchè si ha

$a = A + B' + C'' + \ldots + N^{(n)}$

$b = B + C + \ldots\ldots + N^{(n-1)}$

ec. ec.

$p = N$

come pure

$a' = A + B + C + \ldots + N$

$b' = B' + C' + \ldots + N'$

ec. ec.

$p' = N^{(n)}$.

Ora secondo ciò che abbiamo detto nel Cap. I. di questo trattato, se indichiamo per $\delta, \delta', \delta''$, ec. $\delta^{(n-1)}$, le n radici dell' equazione

$a + b\delta + c\delta^2 + \ldots + p\delta^n = 0$; e per $\gamma, \gamma', \gamma''$, ec. $\gamma^{(n-1)}$ quelle dell' equazione

$a' + b'\gamma + c'\gamma^2 + \ldots + p'\gamma^n = 0$ si ha

$$u_x = \pm \frac{\delta^x}{a} \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \Sigma \frac{\delta''^x}{\delta'^x} \ldots \Sigma \frac{X}{\delta^{(n-1)x}}$$

$$\omega_y = \pm \frac{\gamma^y}{a} \Sigma \frac{\gamma'^y}{\gamma^y} \Sigma \frac{\gamma''^y}{\gamma'^y} \ldots \Sigma \frac{Y}{\gamma^{(n-1)y}}$$; e perciò l' integrale completo dell' equazione del §. 7., nel caso che quel membro, che era nullo, sia X + Y, sarà eguale all' integrale trovato al §. 13., aumentato delle espressioni che abbiamo trovate per u_x e per ω_y.

§. 33. Abbiamo in fatti ritrovato al §. 13. per $\alpha^x \beta^y$ quest' espressione

$$\alpha^x \beta^y = T . \alpha^x + T' . \alpha^{x+1} + \ldots\ldots + T^{(y)} . \alpha^{x+y}$$
$$+ T1 . \alpha^x \beta + T1' . \alpha^{x+1} \beta + \ldots + T1^{(y-1)} \alpha^{x+y-1} \beta$$
$$+ \ldots$$

$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$+ T(n-1).\alpha^x \beta^{n-1} + T'(n-1).\alpha^{x+1}\beta^{n-1} + \dots +$

$T(n-1)^{(y-n+1)}.\alpha^{x+y-n+1}\beta^{n-1}$; il valore adunque di $z_{x,y}$ sarà eguale all'espressione antecedente $+ u_x + \omega_y$.

Ora se nell' equazione

$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y + u_x + \omega_y$ si fa $y = h$, e si fa crescere x della quantità m s' avrà

$\alpha^{x+m}\beta^h = z_{x+m,h} - u_{x+m} - \omega_h$: se adunque invece dei prodotti delle costanti α e β si sostituiscono i di loro valori ricavati da quest' ultima equazione col fare h, m eguali a o, 1, 2, ec., avremo

$$z_{x,y} = u_x + \omega_y + T(z_{x,o} - u_x - \omega_o) + \dots\dots +$$

$$T^{(y)}(z_{x+y,o} - u_{x+y} - \omega_o)$$

$$+ T1.(z_{x,1} - u_x - \omega_1) + \dots\dots +$$

$$T1.^{(y-1)}(z_{x+y-1,1} - u_{x+y-1} - \omega_1)$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ T(n-1).(z_{x,n-1} - u_x - \omega_{n-1}) + \dots\dots +$$

$$T(n-1).^{(y-n+1)}(z_{x+y-n+1,n-1} - u_{x+y-n+1} - \omega_{n-1}).$$

Si vede di quì che i valori di $z_{x,n-1}$ rimangono indeterminati qualunque sia la x, e che perciò devono essere dati; essi adunque possono essere funzioni qualunque di x; per questo si potrà invece di $z_{x,0}-\omega_x-\omega_0$, $z_{x,1}-u_x-\omega_1$, ec. prendere tante funzioni arbitrarie di x indipendenti fra loro, le quali se noi rappresentiamo per $f(x)$, $f1(x)$, ec. il valore di $z_{x,y}$ prenderà la medesima forma che quella del §. 14, solo vi sarà di più $u_x+\omega_y$; questo valore contenendo un numero n funzioni arbitrarie sarà in conseguenza l' integrale completo della proposta equazione a differenze finite e parziali.

§. 34. Per farne un esempio si prenda a integrare l' equazione

$z_{x,y}=x+2^y+z_{x,y-1}+2z_{x+1,y-1}$; se si fa

$z_{x,y}=\alpha^x\beta^y+u_x+\omega_y$ e si sostituisce nella proposta, avremo per determinare β, u_x, ω_y queste tre equazioni

$\beta=1+2\alpha$

$2u_{x+1}+x=0$,

$\omega_y-3\omega_{y-1}=2^y$; dalle quali si ricava

$$\beta^y=(1+2\alpha)^y=1+2y\alpha+\frac{y(y-1)}{2}2\alpha^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{2.3}\times$$
$$2^3\alpha^3+\ldots+2^y\alpha^y;$$

$$u_x = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\omega_y = \frac{-3^y}{-3}\Sigma\frac{2^{y+1}}{3^y} = 3^{y-1}\cdot 2\,\Sigma\left(\frac{2}{3}\right)^y = -2^{y+1} + 3^y\,C$$: s' avrà adunque

$$z_{x,y} = \alpha^x + y\,.\,2\alpha^{x+1} + \frac{y(y-1)}{2}\,.\,2^2\,\alpha^{x+2} + \ldots + 2^y\,\alpha^{x+y} + u_x + \omega_y$$; ma

$$\alpha^x = z_{x,0} - u_x - \omega_0 = z_{x,0} + \frac{1}{2}(x-1) + 2 - C$$, dunque sostituendo i valori per le diverse potenze di α,

$$z_{x,y} = z_{x,0} + \frac{1}{2}(x-1) + 2 - C + y\,.\,2\left(z_{x+1,0} + \frac{1}{2}x + 2 - C\right) + \frac{y(y-1)}{2}\,.\,2^2\left(z_{x+2,0} + \frac{1}{2}(x+1) + 2 - C\right) + \ldots + 2^y\left(z_{x+y,0} + \frac{1}{2}(y+x-1) + 2 - C\right) - \frac{1}{2}(x-1) - 2^{y+1} + 3^y\,C.$$

Ora la costante C svanisce da se medesima, poichè la somma dei coefficienti di $-C$ è $(1+2)^y = 3^y$, e perciò nell' espressione superiore avremo $-3^y\,C + 3^y\,C = 0$; sarà adunque

$$z_{x,y} = z_{x,0} + 2y\left(z_{x+1,0} + \frac{1}{2}x\right) + 2^2 . \frac{y(y-1)}{2}\left(z_{x+2,0} + \frac{1}{2}(x+1)\right) + \frac{2^3 . y(y-1)(y-2)}{2 \cdot 3}\left(z_{x+3,0} + \frac{1}{2}(x+2)\right) + \ldots + 2^y\left(z_{x+y,0} + \frac{1}{2}(x+y-1)\right) + 2 . 3^y - 2^{y+1}$$; espressione

che è sempre finita quando y è positivo.

§. 36. L' equazione che abbiamo all' antecedente §. integrato, è quella che esprime la legge con la quale è formata la seguente serie recurro-recurrente

	0	1	2	3	4 x
0	1	1	1	1	1
1	5	6	7	8	9
2	11	25	29	33	
3	79	92	105	118	
4		ec.	ec.		
⋮					
y					

nella quale ciascun termine $z_{x,y}$ è eguale al suo indice x, più il numero 2 elevato alla potenza y^{esima}, più il termine $z_{x,y-1}$ che ne è al di sopra immediatamente, più il doppio del termine che segue questo ultimo.

Siccome tutti i termini della prima fila orizzontale sono l'unità, così per avere il termine generale di questa serie, dovremo fare nell' espressione di $z_{x,y}$ data al §. antecedente $z_{x,0}=z_{x+1,0}=z_{x+2,0}=$ ec. $=1$: avremo allora fatte le opportune riduzioni

$$z_{x,y}=1+y(x+2)+2.\frac{y(y-1)}{2}(x+3)+2^2.\frac{y(y-1)(y-2)}{2.3}(x+4)+\ldots+$$
$$2^{y-1}.(x+y+1)+2.3^y-2^{y+1}.$$

Se si fa per esempio $x=2, y=2$, avremo

$z_{2,2}=1+2.4+2.5+2.3^2-2^3=19+18-8=29$ come è nella Tavola.

§. 36. Passiamo a considerare l' equazioni a coefficienti variabili. Se le quantità A, B, ec. A′, ec., le quali rappresentano i coefficienti dell' equazione del §. 7, sono funzioni di x, che noi indicheremo per A_x, B_x, ec. l' equazione del citato §. rappresenta una equazione a' differenze finite e parziali dell' ordine n, a coefficienti variabili.

Per averne l' integrale si faccia $z_{x,y}=\alpha_x.\beta^y$ essendo α_x una funzione di x, e β una costante ambedue da determinarsi. Fatte le debite sostituzioni in quella equazione avremo, dopo averla divisa per il fattore comune β^y,

$$\left.\begin{array}{l} A_x . \alpha_x + B_x . \alpha_{x+1} + \ldots . + P_x . \alpha_{x+n} \\ \quad + B'_x . \alpha_x \beta + \ldots . + P'_x . \alpha_{x+n-1} \beta \\ \quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad + P_x^{(n)} . \alpha_x \beta^n \end{array}\right\} = 0$$

la quale è una equazione a differenze finite a coefficienti variabili di questa forma

$$(A) \ldots A1_x . \alpha_x + B1_x . \alpha_{x+1} + C1_x . \alpha_{x+2} + \ldots . +$$

$$P1_x . \alpha_{x+n} = 0, \text{ in cui si ha}$$

$$A1_x = A_x + B'_x . \beta + C''_x . \beta^2 + \ldots + P_x^{(n)} . \beta^n$$

$$B1_x = B_x + C'_x . \beta + \ldots\ldots\ldots + P_x^{(n-1)} . \beta^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P1_x = P_x$$

la quale equazione supera l' attuali forze dell'analisi, come abbiamo veduto al primo Capitolo: si vede di quì che l'integrale dell' equazioni a differenze finite e parziali a coefficienti funzioni di una variabile, dipende dall' integrazione dell' equazioni a differenze finite a coefficienti variabili; di modo che ogni passo fatto nell'integrazione di queste ne porterà uno nell' integrazione di quelle.

§. 37. Se si suppone che l' equazione manchi di tutti quei termini nei quali la x è aumentata di un numero maggiore dell'unità, cioè che sia

$$\left.\begin{array}{l} A_x z_{x,y} + B'_x z_{x,y+1} + C''_x z_{x,y+2} + \ldots + P^{(n)}_x . z_{x,y+n} \\ \quad + B_x z_{x+1,y} + C'_x z_{x+1,y+1} + \ldots + P^{(n-1)}_x . z_{x+1,y+n-1} \end{array}\right\} = 0$$

Allora nell' equazione (A) avremo $C1_x = D1_x =$ ec. $= P1_x = 0$

e diverrà in conseguenza una equazione del primo ordine

$A1_x . \alpha_x + B1_x . \alpha_{x+1} = 0$ che si sa sempre integrare: secondo ciò che abbiamo detto al Capitolo 1. §. 37. l' integrale di questa equazione è

$\alpha_x = e^{\Sigma \log.\left(-\frac{A1_x}{B1_x}\right)} . C$; togliendo il segno sommatorio e moltiplicando per β^y avremo

$$z_{x,y} = \beta^y \left(-\frac{A1_{x-1}}{B1_{x-1}}\right)\left(-\frac{A1_{x-2}}{B1_{x-2}}\right)\left(-\frac{A1_{x-3}}{B1_{x-3}}\right) \ldots \left(-\frac{A1_1}{B1_1}\right) C,$$

essendo

$$\frac{A1_x}{B1_x} = \frac{A_x + B'_x \beta + C''_x \beta^2 + \ldots + P^{(n)}_x . \beta^n}{B_x + C'_x \beta + \ldots + P^{(n-1)}_x . \beta^{n-1}}.$$

Se adesso si suppone che l' espressione di α_x ridotta in serie ordinata secondo le potenze decrescenti di β, sia rappresentata da

$\alpha_x = T\beta^{\mu} + T'\beta^{\mu-1} + T''\beta^{\mu-2} + T'''\beta^{\mu-3} +$ ec., avremo

$$z_{x,y} = \alpha_x . \beta^y = T\beta^{y+\mu} + T'\beta^{y+\mu-1} + T''\beta^{y+\mu-2} + \text{ec.}$$

Ora facendo $x = 0$ nell' equazione $z_{x,y} = \alpha_x \beta^y$ avremo $\beta^y = \frac{z_{0,y}}{\alpha_0}$; ed essendo β una indeterminata si vede che i valori di $z_{x,y}$ quando x è zero rimangono indeterminati, e perciò devono essere dati e possono essere funzioni qualunque di y; così potremo più generalmente prendere per $\frac{z_{0,y}}{\alpha_0}$ una funzione qualunque $f(y)$ della variabile y, e sostituire invece delle potenze dell' indeterminata β una funzione del di loro esponente. L' integrale allora della proposta sarà

$$z_{x,y} = T\varphi(y+\mu) + T'\varphi(y+\mu-1) + T''\varphi(y+\mu-2) + \text{ec.},$$

la quale espressione in generale sarà una serie infinita se la funzione φ non va a zero in qualche caso, o la serie di α_x non è finita; perciò se per le condizioni del problema i termini dell' indice y negativo come $z_{0,-\omega}$ sono nulli, sarà nulla la funzione $\varphi(-\omega)$, e la formola dell' integrale si determinerà al termine $T^{(y+\mu)} . \varphi(0)$.

§. 38.

§. 38. L' espressione $\left(-\frac{A1_{x-1}}{B1_{x-1}}\right)\left(-\frac{A1_{x-2}}{B1_{x-2}}\right)$ ec. potrà ridursi in serie secondo i diversi metodi conosciuti; toccherà però alla sagacità dell' Analista a scegliere quelli che possono essere i più facili secondo la natura della frazione $\frac{A1_{x-1}}{B1_{x-1}}$. Avvertiremo quì che la serie sarà sempre finita, se il denominatore $B1_{x-1}$ non ha più di un termine ed è composta di un numero $(n+1)(x-1)$ di termini.

Esporrò adesso un metodo generale per l' evoluzione di quella quantità in serie, metodo che rapporto alla generalità di cui è dotato può considerarsi come uno dei più semplici.

Si ponga la frazione

$$-\frac{A_{x-1}+B'_{x-1}\beta+C''_{x-1}\beta^2+\dots+P^{(n)}_{x-1}\beta^n}{\beta_{x-1}+C'_{x-1}\beta+\dots+P^{(n-1)}_{x-1}\cdot\beta^{n-1}}$$

sotto questa forma

$$-\frac{P^{(n)}_{x-1}}{P^{(n-1)}_{x-1}}\beta\;\frac{1+\frac{Q^{(n-1)}_{x-1}}{P^{(n)}_{x-1}}\beta^{-1}+\frac{R^{(n-2)}_{x-1}}{P^{(n)}_{x-1}}\beta^{-2}+\dots+\frac{A_{x-1}}{P^{(n)}_{x-1}}\beta^{-n}}{1+\frac{Q^{(n-2)}_{x-1}}{P^{(n-1)}_{x-1}}\beta^{-1}+\frac{R^{(n-3)}_{x-1}}{P^{(n-1)}_{x-1}}\beta^{-2}+\dots+\frac{B_{x-1}}{P^{(n-1)}_{x-1}}\beta^{-n+1}};$$

e facendo per più semplicità i coefficienti del β nel numeratore eguali ad a'_{x-1}, a''_{x-1}, ec. e quelli del denominatore eguali a b'_{x-1}, b''_{x-1}, ec. e la quantità $-\frac{P^{(n)}_{x-1}}{P^{(n-1)}_{x-1}}=$

m_{x-1} avremo per $z_{x,y}$ questa espressione

$$z_{x,y}=m_{x-1}.m_{x-2}.m_{x-3}\ldots m_1.\beta^{y+x-1}\times\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{1+a'_{x-1}\beta^{-1}+a''_{x-1}\beta^{-2}+\ldots+a^{(n)}_{x-1}\beta^{-n}}{1+b'_{x-1}\beta^{-1}+b''_{x-1}\beta^{-2}+\ldots+b^{(n-1)}_{x-1}.\beta^{-n+1}}\right)\times$$

$$\left(\frac{1+a'_{x-2}\beta^{-1}+\ldots+a^{(n)}_{x-2}\beta^{-n}}{1+b'_{x-2}\beta^{-1}+\ldots+b^{(n-1)}_{x-2}\beta^{-n+1}}\right)\text{ ec.}$$

Ora supponghiamo che il prodotto delle quantità complesse contenute fra le parentesi sia eguale a questa serie ordinata secondo le potenze decrescenti del β

$$T_x+T'_x\beta^{-1}+T''_x\beta^{-2}+T'''\beta^{-3}+T''''\beta^{-4}+T^{v}\beta^{-5}+$$

ec.: tutta la difficoltà consisterà nel determinare le funzioni T_x, T'_x, ec. della variabile x.

Per arrivare a questo si faccia crescere x di una unità, ed avremo

$$\left(\frac{1+a'_x\beta^{-1}+\ldots+a^{(n)}_x.\beta^{-n}}{1+b'_x\beta^{-1}+\ldots+b^{(n-1)}_x.\beta^{-n+1}}\right)\times\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{1+a'_{x-1}\beta^{-1}+\ldots+a^{(n)}_{x-1}.\beta^{-n}}{1+b'_{x-1}.\beta^{-1}+\ldots+b^{(n-1)}_{x-1}.\beta^{-n+1}}\right)\text{ ec.}=\ldots$$

$$T_{x+1}+T'_{x+1}.\beta^{-1}+T''_{x+1}.\beta^{-2}+\text{ ec.}$$

E' facile vedere che l' equazione per determinare quei coefficienti sarà

$$\left(T_x + T'_x . \beta^{-1} + T''_x . \beta^{-2} + \text{ec.}\right) \times \ldots$$

$$\left(\frac{1 + a'_x . \beta^{-1} + a''_x . \beta^{-2} + \ldots + a^{(n)}_x . \beta^{-n}}{1 + b'_x . \beta^{-1} + b''_x . \beta^{-2} + \ldots + b^{(n-1)}_x . \beta^{-n+1}}\right) = \ldots$$

$T_{x+1} + T'_{x+1} . \beta^{-1} + T''_x . \beta^{-2} + \text{ec.}$, la quale ordinata secondo le potenze negative di β, eguagliando a zero i coefficienti di queste potenze, dà le seguenti equazioni

$$T_{x+1} - T_x = 0$$

$$T'_{x+1} - T'_x + b'_x T_{x+1} - a'_x T_x = 0$$

$$T''_{x+1} - T''_x + b'_x T'_{x+1} - a'_x T'_x + b''_x T_{x+1} - a''_x T_x = 0$$

$$T'''_{x+1} - T'''_x + b'_x T''_{x+1} - a'_x T''_x + b''_x T'_{x+1} - a''_x T'_x + b'''_x T_{x+1} - a'''_x T_x = 0$$

$$T''''_{x+1} - T''''_x + b'_x T'''_{x+1} - a'_x T'''_x + b''_x T''_{x+1} - a''_x T''_x + b'''_x T'_{x+1} - a'''_x T'_x + b''''_x T_{x+1} - a''''_x T_x = 0$$

ec. ec.

di cui è chiara la legge

Da queste equazioni, integrate che siano, si ricava

$T_x = C$ costante

$T'_x = C\Sigma a'_x - Cb'_x$

$T''_x = C\Sigma a''_x - C\Sigma b''_x + \Sigma a'_x T'_x - \Sigma b'_x T'_{x+1} = C\Sigma a''_x -$
$C\Sigma b''_x + C\Sigma a'_x \Sigma a'_x - C\Sigma a'_x \Sigma b'_x - C\Sigma b'_x \Sigma a'_{x+1} +$
$C\Sigma b'_x \Sigma b'_{x+1}$

ec. ec.

Il nostro integrale sarà adunque così espresso

$z_{x,y} = m_{x-1}\, m_{x-2} \ldots m_1 \,(C\varphi(y+x-1) + T'_x \varphi(y+x-2) +$
$T''_x \varphi(y+x-3) + \text{ec.})$

La costante C è $= 1$, come si ricava dal fare $\beta = 0$ nella serie che abbiamo supposta per esprimere il valore di quel prodotto.

§. 39. Se la natura dell'equazione desse $a''_x = a'''_x =$ ec. $= 0$, come pure $b''_x = b'''_x =$ ec. $= 0$, allora avremmo

$T_x = 1$

$T'_x = \Sigma a'_x - \Sigma b'_x$

$T''_x = \Sigma a'_x T'_x - \Sigma b'_x T'_{x+1}$

$T'''_x = \Sigma a'_x T''_x - \Sigma b'_x T''_{x+1}$

$T''''_x = \Sigma a'_x T'''_x - \Sigma b'_x T'''_{x+1}$

ec.;

e se di più fosse ancora $b'_x = 0$, cioè la frazione complessa si riducesse ad $1 + a'_{x-1} \beta^{-1}$, s' avrebbe

$T_x = 1$

$T'_x = \Sigma a'_x$

$T''_x = \Sigma a'_x \Sigma a'_x$

$T'''_x = \Sigma a'_x \Sigma a'_x \Sigma a'_x$

ec.

Ora in questo caso è facile vedere che la serie si terminerà dopo il termine $T^{(x-1)}_x \beta^{-x+1}$ inclusive: infatti questo termine $T^{(x-1)}_x$ conterrà $x - 1$ segni sommatori che appartengono ad a_x. Ora quando vi è un solo segno sommatorio come Σa_x la serie cui questa somma è eguale, comincia da a_{x-1}: quando vi sono due segni sommatori si va all' a_{x-2} ec: quando adunque sono x segni sommatori si va all' $a_{x-x} = a_0$, il quale si considera zero, poichè si suppone che i prodotti comincino da a_1; e perciò $T^{(x)}_x$ e i suoi seguenti saranno zero; l' integrale adunque terminerà al termine ... $T^{(x-1)}_x \varphi(y)$.

§. 40. Se l' equazione del §. 37., avesse il secondo membro che fosse X funzione della variabile x, allora per averne l' integrale, si supporrebbe

$z_{x,y} = \alpha_x \beta^y + u_x$, essendo u_x un' altra funzione di x da determinarsi: fatte le debite sostituzioni nell' equazione proposta, s' avrà per determinare u_x una equazione di questa forma

$A1_x . u_x + B1_x . u_{x+1} = X$, la quale integrata ci dà

$$u_x = e^{\Sigma \log - \frac{A1_x}{B1_x}} \left(C + \Sigma e^{-\Sigma \log \left(-\frac{A1_x}{B1_x}\right)} \cdot \frac{B1_x}{A1_x} X \right);$$ e questa è

la quantità da aggiungersi all' integrale ritrovato al §. antecedente.

§. 41. Quando i coefficienti di una equazione a differenze finite e parziali, sono funzioni di più di una variabile l' equazione non si può integrare che in alcuni casi particolari: percorriamo questi casi medesimi.

Se l' equazione di secondo ordine (e quello si dice per questa vale per le altre) è di questa forma

$$\left.\begin{aligned} & Az_{x,y} + B.b_x z_{x+1,y} + Cb_x . b_{x+1} . z_{x+2,y} \\ & \quad + B'.a_y . z_{x,y+1} + C'.a_y . b_x . z_{x+1,y+1} \\ & \quad\quad + C''.a_y . a_{y+1} . z_{x,y+2} \end{aligned}\right\} = 0$$

nella quale A, B, C, ec. sono coefficienti costanti, ed a_y, b_x funzioni conosciute di y e di x, si farà per integrarla ...

$z_{x,y} = e^{\Sigma(m_x + n_y)} . \alpha^x \beta^y$, essendo m_x funzione di x; n_y funzione di y; α, β costanti, quantità tutte da determinarsi. Sostituendo il valore di $z_{x,y}$ nella proposta, e dividendo per il fattore comune $e^{\Sigma(m_x + n_y)} . \alpha^x \beta^y$, s' avrà

$$\left.\begin{array}{l} A + B . b_x e^{m_x} . \alpha + C b_x b_{x+1} . e^{m_x} e^{m_{x+1}} . \alpha^2 \\ \quad + B' a_y . e^{n_y} . \beta + C' a_y b_x . e^{m_x} e^{n_y} . \beta\alpha \\ \qquad + C'' a_y a_{y+1} . e^{n_y} e^{n_{y+1}} . \beta^2 \end{array}\right\} = 0 .$$

Se si fa $b_x . e^{m_x} = 1$, $a_y . e^{n_y} = 1$, si avrà $m_x = - log . b_x$, $n_y = - log . a_y$; onde

$z_{x,y} = e^{-\Sigma(log . b_x + log . a_y)} . \alpha^x \beta^y$ e fra le due indeterminate α e β questa equazione

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ \quad + B'\beta + C'\beta\alpha \\ \qquad + C''\beta^2 \end{array}\right\} = 0$$

Per mezzo della quale se ne determina una per l' altra come abbiamo detto al §. 3. e segg. E' dunque manifesto che, se l' integrale trovato al citato paragrafo si moltiplica per

$e^{-\Sigma(\log.b_x + \log.a_y)}$, s' avrà l' integrale per il caso di cui parliamo.

§. 42. L' equazione che abbiamo integrato aveva i coefficienti funzioni di x e y, ma di una determinata forma: la seguente

$$az_{x,y} + bz_{x+1,y+1} + \ldots + pz_{x+m,y+m} = T$$ si potrà integrare qualunque funzioni delle variabili x,y siano i coefficienti a,b,c, ec. e il secondo membro T. Per questo si faccia $x-y=u$, $x=\omega$; avremo $y=\omega-u$. Se adesso invece delle due variabili x,y si sostituiscono nell' equazione i di loro valori $\omega, \omega-u$, la funzione $z_{x,y}$ diverrà una funzione di u e di ω, che noi rappresenteremo per $t_{\omega,u}$. Delle due ω,u la u non varia col variare di x e di y, poichè è eguale alla lor differenza, la quale è la stessa quando x e y crescono della medesima quantità. a,b,c, ec. T divengono funzioni delle variabili ω,u, che indicheremo per a', b', c', ec. T'.

L' Equazione proposta diverrà adunque

$$a'.t_{u,\omega} + b'.t_{u,\omega+1} + \ldots + p'.t_{u,\omega+m} = T'.$$

Ora è facile vedere che in questa si può supporre u costante, poichè è zero la sua variazione: i coefficienti allora si potranno considerare come funzioni di una sola variabile ω, e servirà integrare l' equazione in questa supposizione; invece poi delle costanti che l' integrazione introduce si porranno tante funzioni della variabile che si è supposta costante, cioè funzioni di u, vale a dire di $x-y$. L' integrazione adunque dell' equazione proposta dipende da quella di una equazione a differenze finite ordinarie a coefficienti variabili, delle quali si è parlato al Cap. II.

§. 43. Per

§. 43. Per farne una applicazione si prenda ad integrare l' equazione

$z_{x,y} = xy^2 z_{x-1,y-1}$, ovvero facendo crescere le variabili di un unità

$(x+1)(y+1)^2 z_{x,y} - z_{x+1,y+1} = 0$. Ponendo in quest' ultima equazione, ω per x e $\omega - u$ per y si ha

$(\omega+1)(\omega-u+1)^2 t_{u,\omega} - t_{u,\omega+1} = 0$, la quale è una equazione a differenze finite del primo ordine, il cui integrale nella supposizione di u costante, è

$t_{u,\omega} = C.1.2.3 \ldots \omega (1-u)^2 (2-u)^2 (3-u)^2 \ldots (\omega-u)^2$ e perciò ponendo $\varphi(x-y)$ per C, x per ω, $x-y$ per u.

$z_{x,y} = \varphi(x-y).1.2.3 \ldots x (1-x+y)^2 (2+y-x)^2 (3-x+y)^2 \ldots y^2$, che è integrale completo poichè contiene una funzione arbitraria $\varphi(x-y)$.

§. 44. Per fare adesso un esempio delle equazioni di cui abbiamo cominciato a parlare ai §. 36. 40., si proponga da integrarsi l' equazione

$x.2^x.z_{x,y} + x.z_{x,y+1} - (x^2-2) z_{x+1,y+4} = X$, essendo X una qualunque funzione di x.

Facendo $z_{x,y} = \alpha_x . \beta^y + u_x$ avremo (dopo aver fatte le debite sostituzioni e aver diviso per il fattore comune β^y) per determinare α_x questa equazione

$$\alpha_{x+1}=\alpha_x\cdot\frac{x.2^x+x\beta}{(x^2-2)\beta^4}$$ ovvero

$$\alpha_{x+1}=\alpha_x\cdot\frac{x}{(x^2-2)\beta^3}(1+2^x\beta^{-1});$$ onde

$$\alpha_x=\frac{(x-1)(x-2)\ldots3.2.1}{(\overline{x-1}^2-2)(\overline{x-2}^2-2)\ldots(1^2-2)}\beta^{-3(x-1)}.(1+2^{x-1}\beta^{-1})\times$$

$$(1+2^{x-2}\beta^{-1})\ldots(1+2\beta^{-1}),$$ la quale equazione secondo ciò che si è detto al §. 39., diviene

$$\alpha_x=\frac{(x-1)(x-2)\ldots3.2.1}{(\overline{x-1}^2-2)(\overline{x-2}^2-2)\ldots(1^2-2)}\beta^{-3(x-1)}(1+\beta^{-1}\Sigma2^x+$$

$$\beta^{-2}\Sigma2^x\Sigma2^x+\ldots+\beta^{-x+1}\Sigma2^x\Sigma2^x\ldots\Sigma2^x);$$ ora eseguendo le integrazioni si ha

$$\Sigma2^x=\frac{2^x}{2-1}$$

$$\Sigma2^x\Sigma2^x=\frac{2^{2x}}{(2^2-1)(2-1)}$$

$$\Sigma2^x\Sigma2^x\Sigma2^x=\frac{2^{3x}}{(2^3-1)(2^2-1)(2-1)}$$

. . . .

$$\Sigma2^x\Sigma2^x\ldots\Sigma2^x=\frac{2^{x(x-1)}}{(2^{x-1}-1)(2^{x-2}-1)(2^{x-3}-1)\ldots(2^2-1)(2-1)}$$

Se adesso si moltiplica l' espressione di α_x per β^y, e si osserva che $\beta^y=\frac{\alpha_{0,y}}{\alpha_0}$, (dal che si ricava che per il mo-

desimo β^y si può prendere qualunque funzione arbitraria di y rappresentata per $\varphi(y)$) s' avrà l' integrale della proposta così espresso

$$z_{x,y} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots 2.1}{(x-1^2-2)\ldots(1^2-2)}\Big(\varphi(y-3(x-1)) + \frac{2^x}{2-1}\varphi(y-3(x-1)-1) + \frac{2^{2x}}{(2^2-1)(2-1)}\varphi(y-3(x-1)-2) + \ldots + \frac{2^{x(x-1)}}{(2^{x-1}-1)(2^{x-2}-1)\ldots(2-1)}\cdot\varphi(y-3(x-1)-(x-1))\Big)$$

La quantità poi u_x è data da questa equazione

$x(2^x+1)u_x - (x^2-2)u_{x+1} = X$, sarà perciò

$$u_x = e^{\Sigma \log \frac{x(2^x+1)}{x^2-2}}\left(C + \Sigma e^{-\Sigma \log \frac{x(2^x+1)}{x^2-2}} \cdot \frac{x^2-2}{x(2^x+1)} X\right).$$

Conviene però avvertire che l' integrale ritrovato, come pure quello del §. 37. non è completo poichè contiene una sola funzione arbitraria, quantunque l' equazione sia di un ordine maggiore del primo.

§. 45. Andiamo adesso ad esporre il metodo immaginato dal Geometra La-Place per integrare l' equazioni a differenze finite e parziali a coefficienti funzioni di una sola variabile; metodo che si trova nel Tomo VII. delle memorie presentate all' Accademia di Parigi. Supporremo in seguito che la forma delle equazioni sia tale, che le variazioni di x e di y siano negative, essendo facile ridurle ad avere le variazioni positive, quali le abbiamo considerate fin ora.

Sia proposta adunque da integrarsi l' equazione

(A) . . . $z_{x,y} = A_x z_{x-1,y} + B_x z_{x,y-1} + C_x$ nella quale

A_x, B_x, C_x sono funzioni date di x. Se in questa equazione facciamo $x=1$, si avrà

$z_{1,y}=A_1 z_{0,y}+B_1 z_{1,y-1}+C_1$; e ponendo una funzione qualunque $\varphi(y)$ per $z_{0,y}$ sarà

(1)... $z_{1,y}=A_1\varphi(y)+B_1 z_{1,y-1}+C_1$. Se nella proposta si fa $x=2$, avremo

(2)... $z_{2,y}=A_2 z_{1,y}+B_2 z_{2,y-1}+C_2$, e scemando in questa equazione la y di una unità, si trova

$z_{2,y-1}=A_2 . z_{1,y-1}+B_2 . z_{2,y-2}+C_2$ da cui si ricava il valore di $z_{1,y-1}$, che sostituito nell' equazione (1), darà

$z_{1,y}=A_1\varphi(y)+C_1+\frac{B_1}{A_2}(z_{2,y-1}-B_2 z_{2,y-2}-C_2)$. Ponendo ora questo valore nell' equazione (2), la si cangerà in questa

$$(A')\ldots\ldots z_{2,y}-(B_1+B_2)z_{2,y-1}+B_1 . B_2 . z_{2,y-2}=A_2(A_1\varphi(y)+C_1)+C_2(1+B_2).$$

L' equazione (A) dà ancora

(3)... $z_{3,y}=A_3 . z_{2,y}+B_3 . z_{3,y-1}+C_3$, da cui si ricava

$z_{3,y-1}=A_3 . z_{2,y-1}+B_3 . z_{3,y-2}+C_3$

$z_{3,y-2}=A_3 . z_{2,y-2}+B_3 . z_{3,y-3}+C_3$.

Se adesso nell' equazione (A') si sostituiscono i valori di $z_{2,y-1}$, $z_{2,y-2}$ ricavati dall' equazioni precedenti, s' avrà un valore di $z_{2,y}$ il quale essendo sostituito nell' equazione (3) la cambierà nella seguente

$$(A^2) \ldots . z_{3,y} - (B_1 + B_2 + B_3) z_{3,y-1} + [B_3 (B_1 + B_2) + B_1 B_2] z_{3,y-2} - B_1 B_2 B_3 . z_{3,y-3} = A_3 [A_2 (A_1 \varphi(y) + C_1) + C_2 (1 - B_2)] + C_3 (1 - B_1 - B_2 + B_1 B_2).$$

E' facile vedere che se s' indica per $u_{1,y}$ il secondo membro dell' equazione (A') e per $u_{2,y}$ quello dell' equazione (A^2), sarà

$$u_{2,y} = A_3 u_{1,y} + C_3 (1 - B_1 - B_2 + B_1 B_2).$$

Se si continua a fare uso della proposta (A), s' avrà

$$(4) \ldots z_{4,y} = A_4 z_{3,y} + B_4 . z_{4,y-1} + C_4 \text{ e quindi}$$

$$z_{4,y-1} = A_4 . z_{3,y-1} + B_4 . z_{4,y-2} + C_4$$

$$z_{4,y-2} = A_4 . z_{3,y-2} + B_4 . z_{4,y-3} + C_4$$

$$z_{4,y-3} = A_4 . z_{3,y-3} + B_4 . z_{3,y-4} + C_4$$

Queste tre ultime equazioni danno i valori di $z_{3,y-1}$, $z_{3,y-2}$, $z_{3,y-3}$ i quali sostituiti nell' equazione (A^2), daranno una equazione, dalla quale si prenderà il valore di

$z_{3,y}$ per sostituirlo nell' equazione (4): fatta questa sostituzione si troverà questa equazione.

$$(A^3) \ldots z_{4,y} - (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) z_{4,y-1} + [B_4 (B_3 + B_2 + B_1) + B_3 (B_1 + B_2) + B_1 B_2] z_{4,y-2} - [B_4 (B_3 (B_1 + B_2) + B_1 B_2) + B_1 B_2 B_3] + B_1 B_2 B_3 B_4 z_{4,y-4} = A_4 u_{2,y} + C_4 (1 - B_1 - B_2 - B_3 + B_2 B_3 + B_4 (B_1 + B_2) - B_1 B_2 B_3) = u_{3,y}.$$

Continuando il medesimo andamento si vedrà facilmente che giungeremo ad una equazione di questa forma

$$(B) \ldots z_{x,y} - M_x z_{x,y-1} + N_x z_{x,y-2} - P_x z_{x,y-3} + \ldots \pm T_x z_{x,y-x} = u_{x,y}$$ nella quale si vede che x è considerato come costante: questa equazione potrà trattarsi perciò, come una equazione a differenze ordinarie a coefficienti costanti.

§. 46. Esaminando i coefficienti delle equazioni (A^1), (A^2), (A^3), ec. si vedrà che per determinare M_x, N_x si hanno le seguenti equazioni del primo ordine a differenze ordinarie

$$M_x = M_{x-1} + B_x$$

$$N_x = N_{x-1} + B_x M_{x-1}$$

$P_x = P_{x-1} + B_x N_{x-1}$

ec.

$T_x = T_{x-1} + B_x S_{x-1}$

$u_{x,y} = A_x u_{x-1,y} + C_x (1 - M_{x-1} + N_{x-1} - P_{x-1} \ldots \pm T_{x-1})$.

L' integrazioni di queste equazioni ci danno

$M_x = \Sigma B_{x+1}$

$N_x = \Sigma B_{x+1} \Sigma B_{x+1}$

ec.

$T_x = \Sigma B_{x+1} \Sigma B_{x+1} \ldots \Sigma B_{x+1}$, i segni sommatori nel valore di T_x sono di numero x.

L' integrale poi dell' ultima equazione considerando la y costante è

$$u_{x,y} = e^{\Sigma \log(A_{x+1})} \left(C' - \Sigma e^{-\Sigma \log A_{x+1}} \times \ldots \ldots ; \frac{(-1 + M_x - N_x + P_x \ldots \pm T_x)}{A_{x+1}} C_{x+1} \right)$$

: C' è la costante arbitraria che posta l' integrazione, la quale può essere qualunque funzione di y, e perciò possiamo fare $C' = \varphi(y)$. Così tutti i coefficienti dell' equazione (B), come pure $u_{x,y}$ saranno determinati.

§. 47. Esaminando ora le equazioni (A^1), (A^2), (A^3), ec. si vedrà, che se si prende la serie B_1, B_2, B_3, B_x il coef-

ficiente M_x è eguale alla somma dei termini di questa serie: il coefficiente N_x è eguale alla somma dei prodotti dei termini della medesima serie presi due a due; il coefficiente P_x è eguale alla somma dei prodotti dei termini presi tre a tre ec., ed in fine il coefficiente T_x è eguale al prodotto di tutti i termini della medesima serie; così queste diverse somme saranno espresse dalle formole integrali trovate per i detti coefficienti.

§. 48. Per integrare adunque l' equazione (B) del §. 45., supponghiamo che y cresca in tutta l' equazione della quantità x, essa diverrà allora

$$z_{x,y+x} - M_x z_{x,y+x-1} + N_x z_{x,y+x-2} \dots \pm T_x . z_{x,y} =$$

$u_{x,y+x}$ la quale (supponendovi x costante) paragonata con quella del §. 2. Cap. I., ha per l' integrale completo

$$z_{x,y} = \frac{\alpha^y}{T_x} \Sigma \frac{\alpha'^y}{\alpha^y} \Sigma \frac{\alpha''^y}{\alpha'^y} \dots \Sigma \frac{\alpha(x-1)^y}{\alpha(x-2)^y} \Sigma \frac{u_{x,y+x}}{\alpha(x-1)^y}:$$ i segni sommatori hanno tutti rapporto alla variabile y. Le quantità α, α', ec. $\alpha(x-1)$ sono tante funzioni determinate di x, le quali rappresentano le x radici di questa equazione

$$\alpha^x - M_x \alpha^{x-1} + N_x \alpha^{x-2} - P_x \alpha^{x-3} , \dots \pm T_x = 0.$$

Ora perciò che abbiamo detto al §. antecedente è facile vedere che questa equazione non è altro che la seguente

(α-

$(\alpha - B_1)(\alpha - B_2)(\alpha - B_3) \ldots (\alpha - B_{x-1})(\alpha - B_x) = 0$; si hanno adunque questi x valori per α, $\alpha = B_1$, $\alpha' = B_2$, $\alpha'' = B_3$, ec. $\alpha^{(x-1)} = B_x$: sarà perciò

$$z_{x,y} = \frac{B_1^y}{T_x} \Sigma \frac{B_2^y}{B_2^y} \Sigma \frac{B_3^y}{B_2^y} \ldots \Sigma \frac{B_x^y}{B_{x-1}^y} \Sigma \frac{u_{x,y+x}}{B_x^y}$$ e questo sarà

l'integrale completo dell'equazione (A) proposta al §. 45. Siccome il trovato valore per $z_{x,y}$ contiene un numero x di segni sommatori, questi porteranno un numero x di costanti arbitrarie, le quali potranno essere funzioni di x. Si determineranno tali funzioni sostituendo il valore che si trova per $z_{x,y}$ nella proposta (A), e paragonando i termini omologhi per rapporto a y. Ciò si renderà chiaro per mezzo degl'esempi.

§. 49. Ancora l'equazione del §. 37. che è del primo ordine rapporto ad x, e dell'ordine n rapporto a y, s'integra col medesimo metodo, ed egualmente si trattano l'equazioni del secondo ordine; noi però non ce ne occuperemo, poichè ciò che abbiamo detto fin quì serve a fare comprendere ai nostri leggitori lo spirito di un tal metodo.

§. 50. Per applicare il metodo a qualche esempio sia proposta l'equazione

$z_{x,y} = x^2 . z_{x,y-1} + z_{x-1,y}$. Paragonata questa equazione con quella del §. 45. avremo $A_x = 1$, $C_x = 0$, $B_x = x^2$, onde sostituendo questi valori nelle formole dell'integrale date al §. 46. e segg., avremo

$T_x = 1^2 . 2^2 . 3^2 . 4^2 . . . . x^2$, $u_{x,y} = \varphi(y) = z_{o,y}$, $a = 1^2$, $a' = 2^2$, $a'' = 3^2$, ec. $a^{(x-1)} = x^2$, onde

$$z_{x,y} = \frac{1^{2y}}{1^2.2^2.3^2.4^2 \ldots x^2} \Sigma \frac{2^{2y}}{1^{2y}} \Sigma \frac{3^{2y}}{2^{2y}} \Sigma \frac{4^{2y}}{3^{2y}} \ldots \Sigma \frac{x^{2y}}{(x-1)^{2y}} \Sigma \frac{z_{o,y+x}}{x^{2y}}.$$

Se si fa $z_{o,y} = 1$ qualunque sia la y, avremo, $\Sigma \frac{z_{o,y+x}}{x^{2y}} = \Sigma x^{-2y}$: l' espressione allora di $z_{x,y}$ eseguite l' integrazioni diviene di questa forma (Cap. I. §. 16.)

$$z_{x,y} = A_x + A'_x . 2^{2y} + A''_x . 3^{2y} + A'''_x . 4^{2y} + \ldots \ldots + A^{(x-1)}_x (x^2)^y,$$

nella quale A_x, A'_x, ec. sono le x costanti arbitrarie, funzioni in questo caso di x, le quali sono portate dalle integrazioni. Per determinarle, secondo ciò che abbiamo detto al §. 48., si prendano i valori di $z_{x,y-1}$, $z_{x-1,y}$, e questi saranno

$$z_{x,y-1} = A_x + A'_x . 2^{2(y-1)} + A''_x . 3^{2(y-1)} + \ldots \ldots + A^{(x-1)}_x (x^2)^{y-1}$$

$$z_{x-1,y} = A_{x-1} + A'_{x-1} . 2^{2y} + A''_{x-1} . 3^{2y} + \ldots \ldots + A^{(x-2)}_{x-1} (x-1)^{2y}.$$

Sostituiti tali valori e quello di

$z_{x,y}$ nella proposta avremo

$$A_x + A'_x . 2^{2y} + A''_x . 3^{2y} + \ldots\ldots + A^{(x-1)}_x x^{2y} = x^2 A_x +$$

$$x^2 A'_x . 2^{2(y-1)} + \ldots\ldots + x^2 A^{(x-1)}_x (x^2)^{y-1} + A_{x-1} +$$

$$A'_{x-1} 2^{2y} + \ldots + A^{(x-2)}_{x-1} (x-1)^{2y}$$; ed eguagliando a zero i coefficienti delle potenze omologhe dei numeri 2, 3, 4, ec. avremo

$$A_x = x^2 A_x + A_{x-1},$$

$$2^2 A'_x = x^2 A'_x + 2^2 A'_{x-1},$$

$$3^2 A''_x = x^2 A''_x + 3^2 A''_{x-1} \text{ ec.}$$

$$(x-1)^2 A^{(x-2)}_x = x^2 A^{(x-2)}_x + (x-1)^2 A^{(x-2)}_{x-1}.$$

$$x^2 A^{(x-1)}_x = x^2 A^{(x-1)}_x.$$

Queste equazioni servono a determinare le funzioni A_x, A'_x, ec. La quantità $A^{(x-1)}_x$ rimane però indeterminata. Si ricava adunque per mezzo dell' integrazione

$$A_x = \frac{1}{(1-2^2)(1-3^2)(1-4^2)\ldots(1-x^2)} A_1$$

$$A'_x = \frac{2^{2(x-2)}}{(2^2-3^2)(2^2-4^2)\ldots(2^2-x^2)} A'_2$$

$$A''_x = \frac{3^{2(x-3)}}{(3^2-4^2)(3^2-5^2)\dots(3^2-x^2)} A''_3$$

. . . .

$$A^{(x+2)}_x = \frac{(x-1)^2}{((x-1)^2-x^2)} A^{(x+2)}_{x-1}$$

$A^{(x-1)}_x = A^{(x-1)}_x$. Il valore adunque di $z_{x,y}$ sarà

$$z_{x,y} = \frac{1}{(1-2^2)(1-3^2)\dots(1-x^2)} A_1 + \dots$$

$$\frac{2^{2(x+y-2)}}{(2^2-3^2)(2^2-4^2)\dots(2^2-x^2)} A'_2 + \dots$$

$$\frac{3^{2(x+y-3)}}{(3^2-4^2)(3^2-5^2)\dots(3^2-x^2)} A''_3 + \dots + A^{(x-1)}_x x^{2y}.$$

§. 51. Per trovare le quantità A_1, A'_2, ec. conviene che siano dati i valori di $z_{x,0}$ come or ora vedremo. Siccome una quantità qualunque a^2-x^2 si scioglie in questo prodotto $(a+x)(a-x)$, così potremo, sciogliendo in fattori semplici tutte le quantità che formano i denominatori della superiore formola, dare al valore di $z_{x,y}$ questa forma

$$z_{x,y} = \pm \frac{1}{1.2.3..(x-1)3\dots(x+1)} \Big(A_1 - \frac{3.4(x-1)}{x+2} 2^{2(x+y-2)} A'_2 +$$

$$\frac{3.4.5.6.(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+3)} 3^{2(x+y-3)} A''_3 - \dots$$

$$\frac{3.4.5.6.7.8.(x-3)(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+3)(x+4)} 4^{2(x+y-4)} A'''_4 + \text{ec.} \Big).$$

Quando $x-1$ è dispari si prende il segno inferiore, quando è pari il superiore.

Si faccia adesso $x=2, 3, 4,$ ec. e $y=0$, avremo

$$z_{2,0}=-\frac{1}{3}\left(A_1-\frac{3.4}{4}.A''_2\right)=\frac{1}{3}A_1+A'_2$$

$$z_{3,0}=\frac{1}{2.3.4}\left(A_1-\frac{3.4.2.2^2}{5}.A'_2+\frac{3.4.5.6.1.2}{5.6}A''_3\right)$$

$$=\frac{1}{2.3.4}A_1-\frac{2^2}{5}A'_2+A''_3.$$

ec.

Dalle quali si ricavano i valori delle quantità A_2, A_3, ec.

Per determinare poi la quantità A_1 che rimane in queste equazioni indeterminata si faccia nella formola

$$z_{x,y}=A_x+A'_x.2^{2y}+A''_x.3^{2y}+\ldots+A^{(x-1)}_x x^{2y},\ x=1$$ e

s' avrà $z_{1,y}=A_1$; e siccome A_x deve essere funzione della sola x ne segue che facendovi $x=1$, sarà A_1 una costante. Per vedere come l' espressione trovata per $z_{x,y}$ soddisfà alla proposta nei diversi valori che possono avere le variabili x, y, si faccia $x=2, y=2$; l' equazione proposta diviene allora

$z_{2,2}=2^2 z_{2,1}+z_{1,2}$: ora la formola dell' integrale dà

$$z_{2,2}=-\frac{1}{3}\left(A_1-\frac{3.4}{4}.2^4.A'_2\right)$$

$$z_{2,1}=-\frac{1}{3}\left(A_1-\frac{3.4}{4}2^2.A'_2\right)$$

$z_{1,2} = A_1$, e l' equazione

$z_{2,2} = 2^2 z_{2,1} + z_{1,2}$ diviene identica per la sostituzione dei valori di $z_{2,2}$, $z_{2,1}$, $z'_{1,2}$. L' istesso varrebbe per gl' altri valori che possono prendere le variabili x, y.

§. 51. L' integrazioni delle equazioni a differenze finite e parziali sono di un estesissimo uso nel calcolo delle probabilità, poichè le condizioni dei problemi che si possono proporre in quella branca di calcolo, dalle quali se ne devono ricavare le soluzioni, si esprimono per mezzo di tali equazioni: noi non ne diremo alcuna cosa per non oltrepassare i limiti che ci siamo proposti in questo Capitolo, e piuttosto rimanderemo i nostri leggitori alla Memoria del Sig. la Grange citata al §. (2), ove si troverà tutto ciò che si può desiderare in questo Ramo d' Analisi.

FINE DEL TERZO CAPITOLO.

CAPITOLO IV.

Dell' Integrazione delle Equazioni Lineari a Differenze infinitesime e Parziali.

§. 1. SE per z si rappresenta una funzione qualunque di x e di y, e se per $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ si rappresentano le differenziali di z prese per rapporto ad x e ad y e divise per dx ovvero dy; e in generale per $\frac{d^{n+m}z}{dx^n dy^m}$ la differenziale $(n+m)^{esima}$ della variabile z presa n volte rapporto ad x e divisa per dx^n, e m volte rapporto ad y e divisa per dy^m, una equazione fra le variabili x, y e z e queste differenziali, si chiama una *equazione a differenze parziali infinitesime dell' ordine* $(n+m)^{esimo}$; e se in una tale equazione la z e le sue differenze parziali sono sotto una forma lineare, quella si chiama *equazione lineare*.

Parleremo in questo Capitolo dell' integrazione di tali equazioni. Supporremo in principio i coefficienti costanti; e che l' equazione non contenga alcun termine che non sia moltiplicato o per z, o per le sue differenze parziali: tratteremo in seguito degl' altri casi.

§. 2. La forma generale di una equazione à differenze infinitesime e parziali dell' ordine n^{esimo} è la seguente

$$\left.\begin{array}{l} Az + B\frac{dz}{dx} + C\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots + P\frac{d^nz}{dx^n} \\ + B'\frac{dz}{dy} + C'\frac{d^2z}{dy.dx} + \ldots + P'\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy} \\ + C''\frac{d^2z}{dy^2} + \ldots + P''\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ + P^{(n)}\frac{d^nz}{dy^n} \end{array}\right\} = o$$

A, B, C, ec. sono, come abbiamo detto, coefficienti costanti. Cercare l' integrale di una tale equazione significa cercare per z una tale espressione in x e y, la quale contenga tante funzioni arbitrarie diverse, quanto è l' ordine n dell' equazione, e che sostituendo il valore di z e dei suoi differenziali, l' equazione proposta divenga identica.

Per avere una tale integrazione, si faccia $z = e^{\alpha x + \beta y}$, e avremo

$$\frac{dz}{dx} = e^{\alpha x + \beta y}.\alpha, \text{ ec.},$$

$$\frac{d^nz}{dx^n} = e^{\alpha x + \beta y}.\alpha^n,$$

$$\frac{dz}{dy} = e^{\alpha x + \beta y}\beta, \text{ ec.}$$

$$\frac{d^nz}{dy^n} = e^{\alpha x + \beta y}.\beta^n.$$

$\frac{d^2z}{dxdy}$

$\frac{d^2z}{dxdy} = e^{\alpha x + \beta y} . \alpha\beta$, e generalmente

$\frac{d^nz}{dx^{n-p}dy^p} = e^{\alpha x + \beta y} . \alpha^{n-p}\beta^p$: sostituendo adesso queste espressioni nella proposta, avremo, dopo aver diviso tutti i termini per il fattore comune $e^{\alpha x+\beta y}$, fra α e β questa equazione

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots + P\alpha^n \\ \quad + B'\beta + C'\alpha\beta + \ldots + P'\alpha^{n-1}\beta \\ \qquad + C''\beta^2 + \ldots + P''\alpha^{n-2}\beta^2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + P^{(n)}\beta^n \end{array}\right\} = 0:$$

Così delle due incognite α e β una è sempre determinabile per l' altra.

§. 3. Se l' equazione è del primo ordine

$A + B\frac{dz}{dx} + B'\frac{dz}{dy} = 0$, fra α e β si ha l' equazione di primo grado

$A + B\alpha + B'\beta = 0$; dalla quale determinando β per α si ricava

$\beta = -\frac{A}{B'} - \frac{B}{B'}\alpha$: E facendo $-\frac{A}{B'} = a, -\frac{B}{B'} = b$, si ha $\beta = a + b\alpha$;

così avremo per z questa espressione

$z = e^{\alpha x + ay + b\alpha y} = e^{\alpha(x+by)} . e^{ay}$. Ora osservando che z de-

ve essere una funzione di x e di y, rappresentiamola per $z_{x,y}$ e la nostra supposizione ci darà $z_{x,y} = e^{\alpha x + \beta y}$. Se facciamo adesso $y = 0$, s' avrà $z_{x,0} = e^{\alpha x}$, ed in generale ponendo $x + u$ invece di x, $z_{x+u,0} = e^{\alpha(x+u)}$. Siccome α rimane indeterminata, resteranno perciò indeterminati i valori di $z_{x,y}$ quando y è zero, e potranno essere qualunque funzione $\phi(x)$ di x. Avremo perciò in generale

$e^{\alpha(x+u)} = z_{x+u,0} = \phi(x+u)$; e perciò

$z = e^{\alpha(x+by)} . e^{ay} = e^{ay} \phi(x+by)$; e questa espressione sarà l' integrale completo della proposta, poichè contiene una funzione arbitraria ϕ.

§. 4. Se l' equazione fosse del secondo ordine, allora quella fra α e β sarebbe di secondo grado, cioè

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ \quad + B\beta + C'\alpha\beta \\ \qquad + C''\beta^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Se questa equazione fosse risolubile in due fattori di primo grado, se fosse cioè eguale al prodotto $(\beta - b\alpha - a)(\beta - b'\alpha - a') = 0$, l' integrazione non avrebbe alcuna difficoltà, poichè in questo caso s' avrebbero per β i due valori seguenti $\beta = b\alpha + a$, $\beta = b'\alpha + a'$, e perciò due valori per z cioè

$z = e^{\alpha x + b\alpha y + ay} = e^{\alpha(x+by)} e^{ay}$,

$z = e^{\alpha x + b'\alpha y + a'y} = e^{\alpha(x+b'y)} e^{a'y}$, e per il ragionamento del §. antecedente, troveremmo $e^{\alpha(x+by)} = z_{x+by,0}$, $e^{\alpha(x+b'y)} = z_{x+b'y,0}$. Ora i due termini $z_{x+by,0}$, $z_{x+b'y,0}$ rimanendo indeterminati, si può prendere per essi due qualunque funzioni arbitrarie $\varphi(x+by)$, $\varphi'(x+b'y)$ indipendenti fra loro, e così avremmo per z due valori $z = e^{ay}\varphi(x+by)$, $z = e^{a'y}\varphi(x+b'y)$; ed essendo l' equazione lineare, soddisfarà perciò ad essa ancora la somma di questi due diversi valori di z, e s' avrà allora per l' integrale completo della proposta

$$z = e^{ay}\varphi(x+by) + e^{a'y}\varphi'(x+b'y).$$

§. 5. Così se l' equazione fra α e β dell' n^{esimo} grado è risolubile in n fattori di primo, di modo che si abbiano questi n valori per β; $\beta = b\alpha + a$, $\beta = b'\alpha + a'$, $\beta = b''\alpha + a''$, ... $\beta = b^{(n-1)}\alpha + a^{(n-1)}$, l' equazione dell' ordine n^{esimo} ha sempre il suo integrale completo espresso in termini finiti: quest' integrale è facile vedere operando come per l' equazione del secondo ordine, che sarà

$$z = e^{ay}\varphi(x+by) + e^{a'y}\varphi'(x+b'y) + e^{a''y}\varphi''(x+b''y) \ldots + e^{a^{(n-1)}}\varphi^{(n-1)}(x+b^{(n-1)}.y);$$ $\varphi, \varphi', \varphi''$, ec. $\varphi^{(n-1)}$ rappresentano un numero n di funzioni arbitrarie delle quantità che sono sotto le parentesi.

§. 6. Se l' equazione proposta non contiene altro che

le differenziali n^{esime} di z; se essa è

$$P\frac{d^n z}{dx^n}+P'\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy}+P''\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2}+\ldots+P^{(n)}\frac{d^n z}{dy^n}=0,$$ allora

l' equazione fra α e β sarà

$$P\alpha^n+P'\alpha^{n-1}\beta+P''\alpha^{n-2}\beta^2+\ldots+P^{(n)}\beta^n=0,$$ e dividendo tutta l' equazione per α^n s' avrà

$$P+P'\frac{\beta}{\alpha}+P''\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\ldots+P^{(n)}\frac{\beta^n}{\alpha^n}=0.$$

Siano b, b', b'', ec. $b^{(n-1)}$ gl' n valori di $\frac{\beta}{\alpha}$, cioè le n radici di questa equazione, ed allora i fattori nei quali sarà risolubile, diverranno $\beta-b\alpha, \beta-b'\alpha, \beta-b''\alpha$, ec. $\beta-b^{(n-1)}\alpha$. Essendo adunque zero le quantità a, a', a'', ec., l' integrale completo della nostra equazione sarà quello che si è trovato al §. antecedente, purchè vi si faccia $a=a'=a''=a'''=$ ec. $=0$: sarà dunque

$$z=\varphi(x+by)+\varphi'(x+b'y)+\ldots+\varphi^{(n-1)}(x+b^{(n-1)}y):$$

questo è uno dei due soli casi generali in questa classe d'equazioni che sia stato trattato fin ora dai Geometri, e non è frattanto che un caso particolare della nostra equazione.

§. 7. Ritornando all' equazione del secondo ordine del §. 4., osserveremo che in generale non si può avere β espresso in una funzione razionale dell' altra incognita α, e così il metodo con cui l' abbiamo trattata, non è come abbiamo detto, adattabile che al caso in cui essa sia risolubile in due fattori: così non se ne potrà avere in generale l' integrale completo in termini finiti; sarà perciò sempre pos-

sibile d' averlo espresso per serie infinite in questo modo. Supponghiamo che la risoluzione dell' equazione in α e β ci dia per β questi due valori $\beta = M$, $\beta = M'$ essendo M, M' due quantità composte in qualunque maniera di α, e dei coefficienti dell' equazione, di modo che l' equazione risulti dal prodotto $(\beta - M)(\beta - M')$: avremo allora $z = e^{\alpha x + My}$, $z = e^{\alpha x + M'y}$; ed essendo l' equazione da integrarsi lineare s' avrà

$z = e^{\alpha x + My} + e^{\alpha x + M'y}$, la quale espressione di z può essere presa per un integrale della proposta, ma non completo poichè non contiene funzioni arbitrarie: esso però contiene l' indeterminata α, che può avere infiniti valori dipendendo dal nostro arbitrio, anzi può l' α essere diversa nei due diversi termini, poichè ciascuno di loro soddisfà all' equazione separatamente, ed in molti casi potrà servire un tale integrale per la soluzione dei problemi: ora se si suppone che la quantità e^{My} ridotta in serie secondo le potenze crescenti di α, sia

$e^{My} = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 +$ ec. nella quale T, T', T'' ec. sono funzioni della y, avremo per $e^{\alpha x + My}$ questa espressione

$e^{\alpha x + My} = Te^{\alpha x} + T'\alpha e^{\alpha x} + T''\alpha^2 . e^{\alpha x} + T'''\alpha^3 e^{\alpha x} +$ ec.: ora secondo il ragionamento che si è fatto al §. 3, si ha $e^{\alpha x} = \phi(x)$, sarà perciò $\alpha e^{\alpha x} = \frac{d\phi(x)}{dx}$, ec. $\alpha^n e^{\alpha x} = \frac{d^n\phi(x)}{dx^n}$, onde un valore di z sarà

$z = T\phi(x) + T'\frac{d\phi(x)}{dx} + T''\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + T'''\frac{d^3\phi(x)}{dx^3} +$ ec.: e se in-

dichiamo per $T1$, $T1'$, $T1''$, ec. i coefficienti delle potenze di α nella serie che esprime il valore di $e^{M'y}$, con un simile ragionamento s' avrà un altro valore di z, il quale conterrà un' altra funzione arbitraria $\varphi'(x)$, e sommato col primo trovato s' avrà, prendendo per z la somma di questi due valori particolari

$$z = T\varphi(x) + T' \frac{d\varphi(x)}{dx} + T'' \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{ec.}$$
$$+ T1 . \varphi'(x) + T1' . \frac{d\varphi'(x)}{dx} + T1'' . \frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2} + \text{ec.}$$

che sarà l' integrale completo dell' equazione di secondo ordine, poichè contiene due funzioni arbitraric φ, φ'

§. 8. E' chiaro che il medesimo andamento si può seguire per un' equazione di qualunque ordine n^{esimo}. Contentandosi d' avere l' integrale espresso per serie, se chiamiamo M, M', M'', ec. $M^{(n-1)}$ le n radici o valori di β dell' equazione in α e β, e se si riducono in serie le espressini e^{My}, $e^{M'y}$, $e^{M''y}$, ec. s' avrà tenendo il medesimo discorso che sopra, per l' integrale completo

$$z = T\varphi(x) + T' \frac{d\varphi(x)}{dx} + T'' \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{ec.}$$
$$+ T1 . \varphi'(x) + T1' . \frac{d\varphi'(x)}{dx} + T1'' . \frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2} + \text{ec.}$$
$$+ T2 . \varphi''(x) + T2' . \frac{d\varphi''(x)}{dx} + T2'' . \frac{d^2\varphi''(x)}{dx^2} + \text{ec.}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$+ T(n-1).\varphi^{(n-1)}(x) + T(n-1)'.\frac{d\varphi^{(n-1)}(x)}{dx} + T(n-1)''\times$

$\frac{d^2\varphi^{(n-1)}(x)}{dx^2}$ + ec. $\varphi, \varphi', \varphi''$, ec. $\varphi^{(n-1)}$ rappresentano le n funzioni arbitrarie.

Se ci fossimo contentati d' avere nell' integrale un numero n di costanti arbitrarie diverse, l' integrale sarebbe stato allora rappresentato da

$z = e^{\alpha x + My} + e^{\alpha' x + M'y} + e^{\alpha'' x + M''y} + \ldots\ldots\ldots +$

$e^{\alpha^{(n-1)}x + M^{(n-1)}y}$, nel quale α, α', ec. sono n costanti arbitrarie diverse.

L' integrale potrebbe avere ancora questa forma più generale

$z = Ce^{\alpha x + My} + C'e^{\alpha' x + M'y} + C''e^{\alpha'' x + M''y}$ + ec., poichè è facile vedere che le costanti C, C', ec. rimangono indeterminate, svanendo dall' equazione dataci dal sostituire questo valore di z nella proposta. L' integrale completato con questo numero $2n$ di costanti arbitrarie, è sempre espresso in termini finiti.

§. 9. Se le quantità M, M', ec. sono tali che nello sviluppo di $e^{My}, e^{M'y}$, ec. vi siano le potenze negative di α, come α^{-1}, α^{-2}, ec. allora nelle serie che esprimono i valori di $e^{\alpha x + My}$ ec. troveremo i termini moltiplicati per $\alpha^{-1} e^{\alpha x}, \alpha^{-2} e^{\alpha x}$, ec., quantità che quando $e^{\alpha x}$ è rappre-

sentato per $\varphi(x)$, sono $\int dx\,\varphi(x)$, $\int dx \int dx\,\varphi(x)$, ec., così se sia da integrarsi l' equazione

$Az + B\frac{d^2 z}{dx\,dy} + C\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \ldots + P\frac{d^{2n} z}{dx^n dy^n} = 0$, si faccia $z = e^{\alpha x + \beta y}$, ed avremo a risolvere questa equazione $A + B\beta\alpha + C\beta^2\alpha^2 + \ldots + P\beta^n\alpha^n = 0$, la quale da n valori per $\alpha\beta$. Se questi si rappresentano per a', a'', a''', ec. $a^{(n)}$, avremo $\alpha\beta = a'$, $\alpha\beta = a''$ ec. e perciò $\beta = \frac{a'}{\alpha}, = \frac{a''}{\alpha}, = \frac{a'''}{\alpha}$, ec. $= \frac{a^{(n)}}{\alpha}$, e l' espressione di z sarà

$z = e^{\alpha x + \frac{a'y}{\alpha}} + e^{\alpha x + \frac{a''y}{\alpha}} + \ldots + e^{\alpha x + \frac{a^{(n)}y}{\alpha}}$ nella quale si può in ciascun termine prendere una diversa costante per α.

Ora riducendo in serie la quantità $e^{\frac{a'y}{\alpha}}$, avremo

$e^{\frac{a'y}{\alpha}} = 1 + \frac{a'y}{\alpha} + \frac{a'^2y^2}{2\alpha^2} + \frac{a'^3y^3}{2.3.\alpha^3} + \frac{a'^4y^4}{2.3.4.\alpha^4} +$ ec., e perciò un valore di z sarà

$z = e^{\alpha x + \frac{a'y}{\alpha}} = \varphi(x) + a'y\int dx\,\varphi(x) + \frac{a'^2y^2}{2}\int dx \int dx\,\varphi(x) + \frac{a'^3y^3}{2.3}\int dx \int dx \int dx\,\varphi(x) +$ ec. s' avranno così per gl' n diversi valori di z, n serie simili, ciascuna delle quali conterrà una diversa funzione arbitraria, e l' aggregato di queste serie sarà l' espressione di z, la quale conterrà un numero n di funzioni arbitrarie diverse.

§. 10. Se

§. 10. Se invece di determinare β per α si fosse determinato α per β, avremmo trovati gl' integrali delle equazioni sotto forme diverse, ma sarebbero in sostanza i medesimi che quelli avuti superiormente. Così nell' equazione del §. 4. supponendo che essa sia riducibile in due fattori, avremo determinando α per β

$$\alpha=\frac{\beta}{b}-\frac{a}{b}$$

$\alpha=-\frac{\beta}{b'}-\frac{a'}{b'}$; e per un ragionamento analogo a quello che si è fatto al citato §., s' avrebbe

$$e^{\alpha x+\beta y}=e^{\frac{\beta}{b}-\frac{a}{b}x+\beta y}=e^{-\frac{a}{b}x}.e^{\frac{\beta}{b}x+\beta y}$$

$$e^{\alpha x+\beta y}=e^{\frac{\beta}{b'}-\frac{a'}{b'}x+\beta y}=e^{-\frac{a'}{b'}x}.e^{\frac{\beta}{b}x+\beta y}$$ e perciò

$z=e^{-\frac{a}{b}x}\Psi(y+\frac{x}{b})+e^{-\frac{a'}{b'}x}\Psi'(y+\frac{x}{b'})$ indicando per Ψ, Ψ' due funzioni arbitrarie delle quantità poste fra le parentesi.

E' facile adesso vedere, che le due formole avute per l' integrale completo, quantunque di due forme diverse sono in sostanza una medesima espressione, e che una si riduce facilmente all' altra. Per questo se nella formola del §. 4.

$z=e^{ay}\varphi(x+by)+e^{a'y}\varphi'(x+b'y)$ si fa $\varphi(x+by)=\ldots\ldots$ $\frac{\Psi(x+by)}{e^{\frac{a}{b}(x+by)}}$ avremo il primo termine, che sarà

$$e^{ay}\varphi(x+by)=\Psi(x+by)\frac{e^{ay}}{e^{\frac{a}{b}(x+by)}}=\Psi(x+by)\times$$

$e^{-\frac{a}{b}x}$; e facendo la medesima trasformazione all' altro termine s' avrà

$z = \Psi(x+by)e^{-\frac{a}{b}x} + \Psi'(x+by)e^{-\frac{a'}{b'}x}$ che è l' istesso integrale che abbiamo trovato superiormente, poichè $\Psi(x+by)$ essendo una funzione arbitraria gli si può dare ancora questa forma $\Psi(\frac{x+by}{b}) = \Psi(\frac{x}{b}+y)$.

§. 11. Se alcune delle quantità M, M', ec. del §. 8. non contengono α, allora le serie che tali quantità portano nell' integrale non hanno che i primi termini, mancando tutti quelli che contengono le quantità α; tali primi termini sono della forma $T\varphi(x)$ e l' integrale rimane sempre completo.

Determinando β per α si hanno tanti valori diversi per β quante unità ha la massima potenza di β; e determinando α per β si hanno tanti valori diversi per α quante unità contiene la massima potenza di α. Ora può accadere che nell' equazione fra α e β, la massima potenza di β sia minore della massima potenza di α, (ciò che segue quando nell' equazione differenziale l' ordine della più alta differenziale di z per rapporto ad y è minore di quello della più alta differenziale rapporto ad x) allora si hanno per β meno valori di quello che sia l' ordine dell' equazione, e perciò nell' integrale un minor numero di funzioni arbitrarie. In questo caso non s' avrà a fare altro che prendere i valori di α determinati per β e cercare l' integrale, operando per α come abbiamo detto per β.

Può accadere non ostante che l' integrale non abbia tante funzioni arbitrarie quante si richiedono per essere completo, e questo segue ogni qual volta la massima potenza di una delle quantità α e β è minore dell' ordine dell' equazione dif-

ferenziale; così nell'equazione proposta al §. 9. l'ordine dell'equazione è $2n$, e non si ha nel di lei integrale che un numero n di serie, ciascuna delle quali contiene una funzione arbitraria diversa.

§. 12. Se il secondo membro dell'equazione generale proposta al §. 2. invece di essere nullo fosse $X+Y$ essendo X una data funzione di x, e Y una data funzione di y, allora si farebbe

$z=e^{\alpha x+\beta y}+F(x)+F'(y)$ indicando per F, F' due funzioni da determinarsi; quindi sostituendo il valore di z e delle sue differenze parziali nella proposta, avremmo per determinare delle funzioni le due equazioni lineari a coefficienti costanti che seguono

$$AF+B\frac{dF}{dx}+C\frac{d^2F}{dx^2}+\ldots\ldots+P\frac{d^nF}{dx^n}=X \qquad 0,$$

$$AF'+B'\frac{dF'}{dy}+C'\frac{d^2F'}{dy^2}+\ldots\ldots+P^{(n)}\frac{d^nF'}{dy^n}=Y,$$ le quali al Capitolo secondo abbiamo veduto come s'integrino completamente: avremo adunque per quello che si è ivi detto

$$F=\frac{1}{P}e^{\delta x}\int e^{(\delta'-\delta)x}dx\int e^{(\delta''-\delta')x}dx\ldots\int e^{(\delta^{(n-1)}-\delta^{(n-2)})x}dx\times$$

$$\int\frac{X}{e^{\delta^{(n-1)}x}}$$

$$F'=\frac{1}{P^{(n)}}e^{\delta_1 y}\int e^{(\delta_1'-\delta_1)y}dy\int e^{(\delta_1''-\delta_1')y}dy\ldots\int e^{(\delta_1^{(n-1)}-\delta_1^{(n-2)})y}dy\times$$

$$\int\frac{Y}{e^{\delta_1^{(n-1)}y}}$$ essendo $\delta, \delta', \delta''$, ec. $\delta^{(n-1)}$ le n radici dell'e-

quazione

$A + B\delta + C\delta^2 + \ldots + P\delta^n = 0$, e $\delta 1, \delta 1'$, ec. $\delta 1^{(n-1)}$ le n radici di quest' altra equazione

$A + B'\delta + C''\delta^2 + \ldots P^{(n)}\delta^n = 0$.

Ora se si suppone (§. 7., 8.) che il valore di β dato per α sia $\beta = M$, avremo

$$z = e^{\alpha x + My} + F(x) + F'(y) = Te^{\alpha x} + T'\alpha e^{\alpha x} + T''\alpha^2 e^{\alpha x} + \text{ec.} +$$

$F(x) + F'(y)$. Se si fa $y = 0$ nella formola

$$z_{x,y} = e^{\alpha x + \beta y} + F(x) + F'(y), \text{ si ha}$$

$e^{\alpha x} = z_{x,0} - F(x) - F'(0)$ e perciò rimanendo α indeterminata il valore di $z_{x,0}$ resterà indeterminato ed al nostro arbitrio. Si prenda adunque una funzione arbitraria $\varphi(x)$ per $z_{x,0} - F(x) - F'(0)$, ed avremo $e^{\alpha x} = \varphi(x)$ da cui si deduce

$$z = T\varphi(x) + T'\frac{d\varphi(x)}{dx} + T''\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{ec.} + F(x) + F'(y):$$

l' integrale adunque della proposta sarà quello che abbiamo trovato al §. 8. aumentato delle due espressioni trovate per F; F'.

E' evidente che in questo caso l' integrale completo contiene oltre il numero n di funzioni arbitrarie, ancora un numero $2n$ di costanti arbitrarie, le quali sono contenute nelle espressioni complete delle due funzioni F, F'. L' integrale rimarrà completo ancora prendendo due valori particolari per F, F'.

§. 13. Allorchè alcuni valori di β sono eguali alcune delle quantità (§. 8.) e^{My}, $e^{M'y}$, ec. saranno anche eguali; e perciò si ridurranno ad una sola quelle serie che esprimono queste quantità; scemerà allora il numero delle funzioni arbitrarie e l' integrale rimarrà completo. Per esempio se fosse $M = M'$, le due prime serie dell' integrale essendo con i medesimi coefficicienti potranno sommarsi in questa guisa

$T(\varphi(x)+\varphi'(x))+T'(\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{d\varphi'(x)}{dx})+$ ec. e cangiando la forma delle funzioni, cioè facendo $\varphi(x)+\varphi'(x)=\Psi x$, s' avrà la serie seguente

$T\Psi x+T'\frac{d\Psi x}{dx}+T''\frac{d^2\Psi x}{dx^2}+$ ec. la quale si porrà nell' integrale invece di quelle due, e così mancherà una funzione arbitraria, e l' integrale sarà incompleto. Per rimediarvi seguiremo il medesimo andamento, che abbiamo seguito nei Capitoli antecedenti per i casi analoghi.

Si riprenda l' equazione fra α e β del §. 2., e si ordini secondo le potenze di β in questa guisa

$$(1) \ldots \beta^0(A+B\alpha+C\alpha^2+\ldots+P\alpha^n)+(B'+C'\alpha+\ldots+P'\alpha^{n-1})\beta+(C''+\ldots+P''\alpha^{n-2})\beta^2+\ldots+P^{(n)}\beta^n=0.$$

Se si moltiplicano i termini di questa equazione per gl' esponenti di β, e si divide per β tutta l' equazione avremo

$$(2)\ldots(B'+C'\alpha+\ldots+P'\alpha^{n-1})+2(C''+\ldots+P''\alpha^{n-2})\beta+\ldots+nP^{(n-1)}\beta^{n-1}=0$$

e le radici della prima equazione (1) essendo i limiti delle radici dell' equazione (2), ne segue che

$A + B\delta + C\delta^2 + \ldots + P\delta^n = 0$, e $\delta 1, \delta 1'$, ec. $\delta 1^{(n-1)}$ le n radici di quest' altra equazione

$A + B'\delta + C''\delta^2 + \ldots P^{(n)}\delta^n = 0$.

Ora se si suppone (§. 7., 8.) che il valore di β dato per α sia $\beta = M$, avremo

$$z = e^{\alpha x + My} + F(x) + F'(y) = Te^{\alpha x} + T'\alpha e^{\alpha x} + T''\alpha^2 e^{\alpha x} + \text{ec.} +$$

$F(x) + F'(y)$. Se si fa $y = 0$ nella formola

$$z_{x,y} = e^{\alpha x + \beta y} + F(x) + F'(y), \text{ si ha}$$

$e^{\alpha x} = z_{x,0} - F(x) - F'(0)$ e perciò rimanendo α indeterminata il valore di $z_{x,0}$ resterà indeterminato ed al nostro arbitrio. Si prenda adunque una funzione arbitraria $\phi(x)$ per $z_{x,0} - F(x) - F'(0)$, ed avremo $e^{\alpha x} = \phi(x)$ da cui si deduce

$$z = T\phi(x) + T'\frac{d\phi(x)}{dx} + T''\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \text{ec.} + F(x) + F'(y):$$

l' integrale adunque della proposta sarà quello che abbiamo trovato al §. 8. aumentato delle due espressioni trovate per F; F'.

E' evidente che in questo caso l' integrale completo contiene oltre il numero n di funzioni arbitrarie, ancora un numero $2n$ di costanti arbitrarie, le quali sono contenute nelle espressioni complete delle due funzioni F, F'. L' integrale rimarrà completo ancora prendendo due valori particolari per F, F'.

§. 13. Allorchè alcuni valori di β sono eguali alcune delle quantità (§. 8.) e^{My}, $e^{M'y}$, ec. saranno anche eguali; e perciò si ridurranno ad una sola quelle serie che esprimono queste quantità; scemerà allora il numero delle funzioni arbitrarie e l' integrale rimarrà completo. Per esempio se fosse $M = M'$, le due prime serie dell' integrale essendo con i medesimi coefficicienti potranno sommarsi in questa guisa

$$T(\varphi(x) + \varphi'(x)) + T'\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\varphi'(x)}{dx}\right) + \text{ec.}$$ e cangiando la forma delle funzioni, cioè facendo $\varphi(x) + \varphi'(x) = \Psi x$, s' avrà la serie seguente

$$T\Psi x + T'\frac{d\Psi x}{dx} + T''\frac{d^2\Psi x}{dx^2} + \text{ec.}$$ la quale si porrà nell' integrale invece di quelle due, e così mancherà una funzione arbitraria, e l' integrale sarà incompleto. Per rimediarvi seguiremo il medesimo andamento, che abbiamo seguito nei Capitoli antecedenti per i casi analoghi.

Si riprenda l' equazione fra α e β del §. 2., e si ordini secondo le potenze di β in questa guisa

$$(1) \ldots\ldots \beta^0 (A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots + P\alpha^n) + (B' + C'\alpha + \ldots\ldots + P'\alpha^{n-1})\beta + (C'' + \ldots\ldots + P''\alpha^{n-2})\beta^2 + \ldots\ldots + P^{(n)}\beta^n = 0.$$

Se si moltiplicano i termini di questa equazione per gl' esponenti di β, e si divide per β tutta l' equazione avremo

$$(2) \ldots\ldots (B' + C'\alpha + \ldots + P'\alpha^{n-1}) + 2(C'' + \ldots + P''\alpha^{n-2})\beta + \ldots + nP^{(n-1)}\beta^{n-1} = 0$$ e le radici della prima equazione (1) essendo i limiti delle radici dell' equazione (2), ne segue che

nel caso di due valori per β eguali, uno di questi soddisfarà nel medesimo tempo a queste due equazioni (1), (2). Se ora la prima equazione moltiplicata per y s' aggiunge all' equazione (2), s' avrà l' equazione (3)

$$(3) \ldots (A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots + P\alpha^n) y + (B' + C'\alpha + D'\alpha^2 + \ldots + P'\alpha^{n-1})(\beta y + 1) + (C'' + D''\alpha + \ldots + P''\alpha^{n-2})(\beta^2 y + 2\beta) + (D''' + \ldots + P'''\alpha^{n-3})(\beta^3 y - 3\beta^2) + \ldots + P^{(n)}(\beta^n y + n\beta^{n-1}) = 0,$$

e uno dei valori eguali di β soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni (1), (3). Pertanto qualunque espressione, funzione di x, y e di uno di quei valori eguali di β, se sostituita nella proposta invece di z, la trasformi nell' equazione (3) sarà un nuovo integrale della proposta medesima.

Se si prende $z = ye^{\alpha x + \beta y}$, s' avrà in generale

$$\frac{d^n z}{dx^{n-m} dy^m} = e^{\alpha x + \beta y} \alpha^{n-m} \beta^m y + m e^{\alpha x + \beta y} \alpha^{n-m} \beta^{m-1};$$

e se si sostituiscono i valori della z, e dei suoi differenziali nella proposta, la si ridurrà appunto all' equazione (3); dunque nel caso di due radici eguali, soddisfà alla proposta ancora $z = ye^{\alpha x + \beta y}$ oltre a $z = e^{\alpha x + \beta y}$: se dunque questo secondo valore di z era rappresentato dalla serie $T\phi(x) + T' \frac{d\phi(x)}{dx} +$ ec, l' altro sarà rappresentato da questa istessa serie moltiplicata per y; e prendendo allora una diversa funzione arbitraria $\phi'(x)$ della x, sarà il nuovo integrale

$z = Ty \, . \, \varphi'(x) + T'y \, . \, \frac{d\varphi'(x)}{dx} + T''y \, . \, \frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2} +$ ec.: e così queste due serie prese in luogo delle prime due, le quali nel caso delle radici eguali diventavano una sola, riporteranno l' integrale ad essere completo.

§. 14. Siccome quando si hanno due valori di β in α, eguali tra loro, se ne hanno viceversa due eguali di α e β, perciò ordinando per α l' equazione fra α e β, e facendo il medesimo ragionamento, si troverà che soddisfà ancora alla proposta per z l' espressione $z = xe^{\alpha x + \beta y}$, e perciò si può prendere ancora per esprimere uno degl' integrali particolari della proposta la serie

$Tx \, . \, \varphi'(x) + T'x \, . \, \frac{d\varphi'(x)}{dx} + T''x \, . \, \frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2} +$ ec., ed ancor questa potrebbe servire a ricompletare l' integrale.

§. 15. Se i valori di β eguagli sono tre di numero, moltiplicando l' equazione (2) per i suoi esponenti, e dividendola per β, diviene

$$2\,(C'' + \ldots + P''\alpha^{n-2})\,\beta^0 + \ldots + n\,(n-1)\,P^{(n)}\,\beta^{(n-2)} = 0,$$

e dalla Teoria dei limiti risulta che uno dei tre valori eguali di β soddisfà nel medesimo tempo alle equazioni (1), (2) e a questa ultima: se ora si moltiplica per y^2 l' equazione (1), per y l' equazione (2) e si aggiungono a quest' ultima medesima, avremo una equazione (4)

$$(4) \ldots (A + B\alpha + \ldots + P\alpha^n)\,y^2 + (B' + C'\alpha + \ldots + P'\alpha^{n-1})\,(\beta y^2 + 2y) + C'' + \ldots + P''\alpha^{n-2})\,(\beta^2 y^2 + 2\beta y + 1) + \ldots\ldots + P^{(n)}\,(\beta^n y^2 + n\beta^{n-1} \, . \, 2y + n\,(n-1) \, . \, \beta^{n-2}) = 0,$$

e una del-

le radici eguali soddisfarà alle equazioni (1), (3), (4).
Se adunque si trova per z una tale espressione, la quale sostituita nella proposta la trasformi nell'equazione (4), questa sarà un nuovo integrale particolare. Se si prende $z = y^2 e^{\alpha x + \beta y}$ essendo β una di quelle radici eguali, e si sostituisce il valore di z e delle differenziali sue nella proposta, ella si cangia nell'equazione (4); sarà perciò una tale espressione di z un nuovo integrale particolare; così nel caso di tre radici eguali s'avrà oltre l'espressione $z = e^{\alpha x + \beta y}$ le due espressioni $z = y e^{\alpha x + \beta y}$, $z = y^2 e^{\alpha x + \beta y}$, le quali tutte soddisfaranno alla proposta: β è una di quelle radici eguali; così invece delle prime tre serie dell'integrale completo, le quali si ridurrebbero ad una sola, si prenderanno queste quì

$$T\,\varphi(x) + T' \frac{d\varphi(x)}{dx} + T'' \frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2} + \text{ec.}$$

$$Ty.\varphi'(x) + T'y.\frac{d\varphi'(x)}{dx} + T''y.\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{ec.}$$

$$Ty^2.\varphi''(x) + T'y^2.\frac{d\varphi''(x)}{dx} + T''y^2.\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \text{ec.}$$ e l'integrale rimarrà completo.

§. 16. Quando si hanno tre valori eguali di β in α, se ne hanno parimente tre eguali di α in β, e perciò ragionando per α come per β, avremo ancora per soddisfare all'equazione differenziale le due espressioni $z = x^2 e^{\alpha x + \beta y}$, $z = x e^{\alpha x + \beta y}$, le quali portano le due serie

$Tx.\varphi' x +$

$Tx.\varphi'x + T'x.\frac{d\varphi'x}{dx} +$ ec.

$Tx^2.\varphi''x + T'x^2.\frac{d\varphi''x}{dx} +$ ec. le quali potranno ancora servire per completare gl' integrali invece di quelle adoprate superiormente: ma nel caso di tre radici eguali si può avere un altro integrale particolare oltre quelli trovati nel caso di tre radici eguali

Se dopo avere ordinata l' equazione secondo le potenze di α, si moltiplicano i suoi termini per gl' esponenti che vi ha questa quantità, e si divide per α, s' avrà questa equazione $(2)'$

$$(2)' \ldots (B + C'\beta + D''\beta^2 + \ldots + P^{(n-1)}\beta^{n-1})\alpha^0 + 2(C + D'\beta + \ldots + P^{(n-1)}\beta^{n-2})\alpha + 3(D + E'\beta + \ldots + P^{(n-2)}\beta^{n-3})\alpha^2 + \ldots + nP\alpha^{n-1} = 0.$$

Se adesso l'equazione (2) del §. 13. si ordina secondo le potenze di x, e moltiplicando i di lei termini per gl' esponenti che vi ha la α si divide per α, avremo la seguente equazione $(3)'$

$$(3)' \ldots C' + 2D''\beta + \ldots + (n-1)P^{(n-1)}\beta^{n-2} + 2(D' + \ldots + (n-2)P^{(n-2)}\beta^{n-3})\alpha + \ldots + (n-1)P'\alpha^{n-1} = 0,$$ ed è manifesto che uno dei valori eguali di β soddisfarà nel medesimo tempo alle quattro equazioni (1), (2), $(2)'$, $(3)'$; ò perciò ancora alla somma dell' equazione (1) moltiplicata per xy, con l' equazione (2) moltiplicata per x, con l' equazione $(2)'$ moltiplicata per y, e con l' equazione $(3)'$, cioè a questa equazione

$(5) \ldots (1)xy + (2)x + (2)'y + (3)' = 0$. Così qualunque espres-

sione per z la quale sostituita nella proposta la trasformi nell' equazione (5) sarà un nuovo integrale dell' equazione proposta: è facile vedere che questa espressione è

$z = xy . e^{\alpha x + \beta y}$ prendendo per β un dei valori eguali, poichè sostituendo tale espressione e i di lei differenziali nella proposta la si riduce appunto all' equazione (5).

Se adunque la serie che esprime il valore di $e^{\alpha x + \beta y}$ la si moltiplica per xy, s' avrà la serie che esprime quest' ultimo integrale particolare. Sarà facile vedere come dobbiamo regolarci quando si ha un maggior numero di radici eguali.

§. 17. Se l' equazione fosse nel caso che abbiamo detto al §. 5., vale a dire fosse resolubile in fattori di primo grado, l' integrale nel caso di tre radici eguali sarebbe

$$z = e^{ay} \phi(x + by) + e^{ay} y \phi'(x + by) + e^{ay} . y^2 \phi''(x + by) +$$

$$e^{a'''y} \phi'''(x + b'''y) + \ldots + e^{a^{(n-1)}y} . \phi^{(n-1)}(x + b^{(n-1)}y),$$

e sarà completo poichè contiene un numero n di funzioni arbitrarie diverse. Passiamo adesso all' equazioni ad un più gran numero di variabili.

§. 18. Se z fosse una funzione $z_{x,y,u}$ di tre variabili x, y, u, e si avesse una equazione lineare fra z e le sue differenziali, per integrarla si seguirebbe il medesimo metodo di cui si è sopra fatto uso.

Prendiamo l' equazione del primo ordine

$\mathrm{A}z + \mathrm{B}\frac{dz}{dx} + \mathrm{C}\frac{dz}{dy} + \mathrm{E}\frac{dz}{du} = 0$, nella quale i coefficienti si suppongono costanti; si faccia $z = e^{\alpha x + \beta y + \gamma u}$, s' avrà in generale

$\frac{d^{n+p+q}z}{dx^n dy^p du^q} = e^{\alpha x+\beta y+\gamma u}\alpha^n\beta^p\gamma^q$. Se ora si sostituisce nella proposta il valore di z e dei suoi differenziali s' avrà dopo aver diviso per il fattore comune $e^{\alpha x+\beta y+\gamma u}$, fra le quantità α, β e γ questa equazione

$A+B\alpha+C\beta+E\gamma=0$, dalla quale se ne può determinare una per le altre due. Si prenda il valore di γ ed avremo

$\gamma=-\frac{A}{E}-\frac{B}{E}\alpha-\frac{C}{E}\beta$ e facendo $-\frac{A}{E}=a$, $-\frac{B}{E}=b$, $-\frac{C}{E}=c$, s' avrà

$\gamma=a+b\alpha+c\beta$, e sostituendo questo valore nell' espressione di z avremo

$e^{\alpha x+\beta y+au+b\alpha u+c\beta u}$ che si riduce a

$z=e^{\alpha(x+bu)+\beta(y+cu)}.e^{au}$: le quantità adunque α e β rimangono indeterminate. Per determinarle si rammenti che z è una funzione di x, y e u, la quale espressa per $z_{x,y,u}$

ci dà $z_{x,y,u}=e^{\alpha x+\beta y+\gamma u}$: si faccia $u=0$ ed avremo

$z_{x,y,0}=e^{\alpha x+\beta y}$ ed in generale

$z_{x+\omega,y+\omega',0}=e^{\alpha(x+\omega)+\beta(y+\omega')}$; è dunque manifesto che rimanendo per la natura del problema α e β indeterminate, sarà anche indeterminato il valore di z, quando la variabile u è zero, e potrà essere qualunque funzione di

x e di y, la quale se noi rappresentiamo per $\varphi(x,y)$, avremo $z_{x,y,0} = e^{\alpha x + \beta y} = \varphi(x,y)$, e in generale

$e^{\alpha(x+\omega)+\beta(y+\omega)} = \varphi(x+\omega, y+\omega')$, e perciò

$z = e^{\alpha(x+bu)+\beta(y+cu)} . e^{au} = e^{au} . \varphi(x+bu, y+cu)$ e questo sarà l' integrale completo dell' equazione, poichè contiene una funzione arbitraria.

§. 19. Se in vece di determinare γ, si fosse preso il valore di β o di α, avremmo avuto

$$\beta = \frac{1}{c}\gamma - \frac{b}{c}\alpha - \frac{a}{c}$$

$\alpha = \frac{1}{b}\gamma - \frac{c}{b}\beta - \frac{a}{b}$, e per ciascuna di queste ragionando come si è fatto per γ s'avrebbero queste due forme dell' integrale completo,

$$z = e^{-\frac{a}{c}y} \varphi'(x - \frac{b}{c}y, u + \frac{1}{c}y)$$

$z = e^{-\frac{a}{b}x} \varphi''(y - \frac{c}{b}x, u + \frac{1}{b}x)$, e queste tre forme quantunque in apparenza diverse sono però in sostanza la medesima. Infatti se alla funzione arbitraria φ dell' integrale completo trovato al §. antecedente si da questa forma

$\varphi(x+bu, y+cu) = \dfrac{\varphi'(x+bu - \frac{b}{c}(y+cu), \frac{1}{c}(y+cu))}{e^{\frac{a}{c}(y+cu)}}$ che è sempre una funzione di $x+bu$ e di $a+by$, avremo

$$z = e^{au}\varphi(x+bu, y+cu) = \frac{e^{au}\varphi'\left(x+bu-\frac{b}{c}(y+cu), \frac{1}{c}(y+cu)\right)}{e^{\frac{a}{c}(y+cu)}} =$$

$e^{-\frac{a}{c}y}\varphi'\left(x-\frac{b}{c}y, u+\frac{1}{c}y\right)$, che è la seconda forma dell' integrale completo trovata sopra: così se si fa

$$\varphi(x+bu, y+cu) = \frac{\varphi''\left(\frac{1}{b}(x+bu), y+cu-\frac{c}{b}(x+bu)\right)}{e^{\frac{a}{b}(x+bu)}},$$ s'avrà moltiplicando per e^{au}, e riducendo

$z = e^{-\frac{a}{b}x}\varphi''\left(\frac{1}{b}x+u, y-\frac{c}{b}x\right)$ che è la terza forma dell' integrale.

§. 20. Per generalizzare la Teoria precedente prendiamo ad integrare una equazione del terzo ordine; e ciò che si dirà di quessa varrà ancora per gl' ordini superiori. Una tale equazione ha generalmente questa forma

$$\left.\begin{array}{r}
Az + B\dfrac{dz}{dx} + C\dfrac{d^2z}{dx^2} + D\dfrac{d^3z}{dx^3} \\
+ B'\dfrac{dz}{dy} + C'\dfrac{d^2z}{dxdy} + D'\dfrac{d^3z}{dx^2dy} \\
+ C''\dfrac{d^2z}{dy^2} + D''\dfrac{d^3z}{dxdy^2} \\
+ D'''\dfrac{d^3z}{dy^3} \\
+ E\dfrac{dz}{du} + F\dfrac{d^2z}{dxdu} + H\dfrac{d^3z}{dx^2du} \\
+ F'\dfrac{d^2z}{du^2} + H'\dfrac{d^3z}{dxdu^2} \\
+ H''\dfrac{d^3z}{du^3} \\
+ P\dfrac{d^2z}{dudy} + Q\dfrac{d^3z}{dxdudy} \\
+ Q'\dfrac{d^3z}{du^2dy} \\
+ Q''\dfrac{d^3z}{dudy^2}
\end{array}\right\} = 0$$

Se si fà $z = e^{\alpha x + \beta y + \gamma u}$ e si sostituisce il valore di z e delle sue differenze parziali in questa equazione, s' avrà dopo averla ridotta

$$\left.\begin{aligned}
&A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 \\
&\quad + B'\beta + C'\alpha\beta + D'\beta\alpha^2 \\
&\quad\quad + C''\beta^2 + D''\alpha\beta^2 \\
&\quad\quad\quad + D'''\beta^3 \\
&\quad + E\gamma + F\gamma\alpha + H\alpha^2\gamma \\
&\quad\quad + F'\gamma^2 + H'\alpha\gamma^2 \\
&\quad\quad\quad + H''\gamma^3 \\
&\quad\quad + P\beta\gamma + Q\gamma\beta\alpha \\
&\quad\quad\quad + Q'\gamma^2\beta \\
&\quad\quad\quad + Q''\gamma\beta^2
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Se il primo membro di questa equazione in α, β e γ potesse risolversi in tre fattori di primo grado, di modo che fosse eguale a questo prodotto $(\beta - a'\alpha - b'\gamma - c')(\beta - a''\alpha - b''\gamma - c'')(\beta - a'''\alpha - b'''\gamma - c''')$ s' avrebbero per β questi tre valori

$$\begin{aligned}
\beta &= a'\alpha + b'\gamma + c' \\
&= a''\alpha + b''\gamma + c'' \\
&= a'''\alpha + b'''\gamma + c''',
\end{aligned}$$

e perciò ancora per z queste tre espressioni diverse

$$\begin{aligned}
z &= e^{\alpha(x+a'y)+\gamma(u+b'y)} \cdot e^{c'y} \\
&= e^{\alpha(x+a''y)+\gamma(u+b''y)} \cdot e^{c''y} \\
&= e^{\alpha(x+a'''y)+\gamma(u+b'''y)} \cdot e^{c'''y};
\end{aligned}$$

ciascuna delle quali da un integrale particolare che contiene una funzione arbitraria, e perciò la di loro somma darà l' integrale completo della pro-

po ta; è facile vedere che questo integrale sarà

$$z = e^{c'y} \varphi'(x + a'y, u + b'y) + e^{c''y} \varphi''(x + a''y, u + b''y) + e^{c'''y} \varphi'''(x + a'''y, u + b'''y);$$ $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ rappresentano

tre funzioni arbitrarie diverse.

§. 21. In generale i valori di β non si possono esprimere che in funzioni irrazionali delle indeterminate α e γ; siano adunque M, M', M'' i tre valori di β, ed avremo allora per z queste tre espressioni

$$z = e^{\alpha x + My + \gamma u},$$

$$z = e^{\alpha x + M'y + \gamma u},$$

$$z = e^{\alpha x + M''y + \gamma u},$$ le quali si possono ancora considerare moltiplicate per una costante arbitraria, ed allora sommandole s' avrà per z questa espressione di tre termini

$$z = Ce^{\alpha x + \gamma u} . e^{My} + C'e^{\alpha x + \gamma u} . e^{M'y} + C''e^{\alpha x + \gamma u} . e^{M''y},$$ la

quale contiene nove costanti arbitrarie diverse; poichè le indeterminate α, β d' un termine, possono essere diverse da quelle di un altro dei detti termini, soddisfacendo ognuno all' equazione proposta separatamente; ma se si vogliono introdurre le tre funzioni arbitrarie, si ridurrà la quantità e^{My} in una serie secondo le potenze di α e γ, e se si suppone che un termine di questa serie sia $P\alpha^m \gamma^n$, essendo m, n numeri interi positivi qualunque, avremo nella espressione di z il termine $Pe^{\alpha x + \gamma u} . \alpha^m \gamma^n$ il quale facendo

$e^{\alpha x + \gamma u} =$

$e^{\alpha x + \gamma u} = \varphi(x,u)$, è $P\frac{d^{m+n}\varphi(x,u)}{dx^m du^n}$. Se poi i numeri m ed n fossero tutti e due negativi, allora nell' espressione della z, vi sarà il termine $Pe^{\alpha x + \gamma u} \cdot \frac{1}{\alpha^m \gamma^n}$, il quale nella detta supposizione è

$P\int dx \int dx \ldots \int dx \int du \int \ldots \int \varphi(x,u) du$, Prendendo m segni sommatori rapporto ad x, ed n segni rapporto ad u; e se dei due numeri m, n uno è positivo, l' altro negativo, cioè se un termine dell' espressione è $Pe^{\alpha x + \gamma u} \cdot \alpha^{-m} \gamma^n$, si potrà mettere nell' integrale

$P\int dx \int dx \ldots \int dx \frac{d^n \varphi}{du^n}$, essendo m di numero i segni sommatori: così la serie che esprime il valore di $e^{\alpha x + \gamma u} \cdot e^{My}$ introdurrà una funzione arbitraria. Due altre funzioni arbitrarie introdurranno le serie che esprimono i valori degl' altri due termini dell' integrale, e così l' integrale completo sarà dato in serie, e conterrà tre funzioni arbitrarie.

§. 22. Abbiamo nell' equazione del §. 20. supposto zero il secondo membro: esso però potrebbe essere di questa forma $X + Y + U$, essendo X, Y, U respettive funzioni delle variabili x, y, u: in questo caso s' aggiungerebbe all' integrale che si è trovato la quantità $\omega_x + \omega'_y + \omega''_u$, essendo ω_x, ω'_y, ω''_u respettive funzioni di x, di y, di u da determinarsi. S' avrebbe per determinare ciascuna di esse, una di quelle equazioni a differenze ordinarie a coefficienti variabili, delle quali abbiamo parlato al Capitolo I. si segua l' anda-

mento tenuto al §. 12., e tutto sarà facile.

§. 23. Sia proposta per esempio l' equazione $c^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ che è l' equazione alle corde vibranti di uniforme densità (Cusin. Cal. dif. edi. sec. cr. 267.). Prendendo z per y, ed y per t, l' equazione allora diverrà $c^2 \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}$ la quale paragonata con l' equazione del §. 4., ci dà questa equazione da risolversi $c^2\alpha^2 = \beta^2$, dalla quale si ricava $\beta = \pm c\alpha$; onde l' integrale completo sarà

$z = \varphi(x + cy) + \varphi'(x - cy)$; e perciò rimettendo y per z e t per y s' avrà

$y = \varphi(x + ct) + \varphi'(x - ct)$; le caratteristiche φ, φ' denotano due funzioni arbitrarie.

Si proponga da integrarsi un' altra equazione

$2z + 3\frac{dz}{dx} - 2\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{dz}{dy} - \frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2z}{dy^2} = mx + ny^2$. Se si fa $z = e^{\alpha x + \beta y} + z'_x + z''_y$, avremo fra α e β l' equazione

$\beta^2 - (3 + \alpha)\beta + 2 + 3\alpha - 2\alpha^2 = 0$, la quale si scioglie in questi due fattori $(\beta - 2\alpha - 1)(\beta + \alpha - 2)$; avremo perciò $\beta = 2\alpha + 1$, $\beta = 2 - \alpha$; e per determinare z', z'' s' avranno le due equazioni

$$2z' + 3\frac{dz'}{dx} - 2\frac{d^2z'}{dx^2} = mx,$$

$$2z'' - 3\frac{dz''}{dy} + \frac{d^2z''}{dy^2} = ny^2,$$ dalle quali ricaviamo (Cap. II.)

$$z' = -\frac{1}{2} e^{2x} \int e^{-\frac{5}{2}x} dx \int \frac{mx}{e^{-\frac{1}{2}x}} dx$$

$z'' = e^{y} \int e^{y} dy \int \frac{ny^2}{e^{2y}} dy$. L' integrale completo della proposta sarà adunque

$$z = \varphi(x+2y).e^{y} + \varphi'(x-y).e^{2y} - \frac{1}{2} e^{2x} \int e^{-\frac{5}{2}x} dx \times \ldots\,:$$

$$\int \frac{mx}{e^{-\frac{1}{2}x}} dx + e^{y} \int e^{y} dy \int \frac{ny^2}{e^{2y}} dy.$$

§. 24. Una equazione a differenze parziali si considera dai Geometri come integrata, allorchè la di lei integrazione si fa dipendere da quella di una equazione a differenze ordinarie. Ciò premesso sia proposto da integrarsi l' equazione

$$\left.\begin{aligned} A_x z + B_x \cdot \frac{dz}{dx} + C_x \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \ldots + P_x \cdot \frac{d^n z}{dx^n} \\ + B'_x \cdot \frac{dz}{dy} + C'_x \cdot \frac{d^2z}{dxdy} + \ldots + P'_x \cdot \frac{d^n z}{dx^{n-1}.dy} \\ + C''_x \cdot \frac{d^2z}{dy^2} + \ldots + P''_x \cdot \frac{d^n z}{dx^{n-2}.dy^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + P^{(n)}_x \cdot \frac{d^n z}{dy^n} \end{aligned}\right\} = X$$

nella quale i coefficienti e il secondo membro X, si suppongono funzioni date della variabile x. Per riuscire in

questa ricerca supponghiamo $z = ue^{\beta y} + z'_x$ essendo u e z'_x funzioni di x da determinarsi, e β una costante indeterminata. Sostituendo il valore di z e dei suoi differenziali nella proposta s' avrà

$$\Big((A_x + B'_x \beta + C''_x \beta^2 + \ldots + P^{(n)}_x \beta^n)u + (B_x + C'_x \beta + \ldots + P^{(n-1)}_x \beta^{n-1})\frac{du}{dx} + (C_x + \ldots + P^{(n-2)}_x \beta^{n-2})\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + P_x \cdot \frac{d^nu}{dx^n}\Big)e^{\beta y} + A_x z'_x + B_x \frac{dz'}{dx} + C_x \frac{d^2z'}{dx^2} + \ldots\ldots + P_x \frac{d^nz'}{dx^n} = X.$$

Se adesso si suppone

$$(1) \ldots A_x z' + B_x \frac{dz'}{dx} + \ldots + P_x \cdot \frac{d^nz'}{dx^n} = X,$$

si determinerà per mezzo di questa equazione z'_x, e s' avrà per determinare u una equazione di questa forma

$$(2) \ldots a_x \cdot u + b_x \cdot \frac{du}{dx} + c_x \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + p_x \cdot \frac{d^nu}{dx^n} = 0:$$

l' integrale adunque della proposta dipende dall' integrlzione delle due equazioni (1), (2). lineari a differenze ordinarie, a coefficienti variabili.

§. 25. Se nell' equazione non vi fossero rapporto all' x altro che le differenziali prime $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dxdy}$ ec. $\frac{d^nz}{dxdy^{n-1}}$; se cioè l' equazione fosse

$$\left.\begin{array}{l} A_x z + B'_x . \frac{dz}{dy} + C''_x . \frac{d^2 z}{dy^2} + \ldots + P^{(n)}_x . \frac{d^n z}{dy^n} \\ + B_x . \frac{dz}{dx} + C'_x . \frac{d^2 z}{dx dy} + \ldots + P^{(n-1)}_x . \frac{d^n z}{dx dy^{n-1}} \end{array}\right\} = X,$$

allora facendo eguali a zero i coefficienti delle differenziali che mancano, questa equazione dipenderebbe dall' integrazione di queste due

$$A_x z' + B_x . \frac{dz'}{dx} = X$$

$(A_x + B'_x . \beta + C''_x . \beta^2 + \ldots + P^{(n)}_x \beta^n) u + (B_x + C'_x \beta + \ldots + P^{(n-1)}_x . \beta^{n-1}) \frac{du}{dx} = 0$, le quali due equazioni essendo del primo ordine possono ambedue integrarsi completamente.

Al Cap. II. §. 18. si ha la formola per l' integrale dell' equazioni lineari del primo ordine a coefficienti variabili. Paragonando le nostre equazioni con quella formola, si ha per z'

$$z' = e^{-\int \frac{A_x}{B_x} dx} \left(E' + \int e^{\int \frac{A_x}{B_x} dx} . \frac{X}{B_x} \right)$$ e per u

$$u = E e^{-\int \frac{A_x + B'_x . \beta + \ldots + P^{(n)}_x . \beta^n}{B_x + C'_x \beta + \ldots + P^{(n-1)}_x . \beta^{n-1}} dx}$$: l' integrale adunque della proposta sarà

$$z = ue^{\beta y} + z' = Ee^{\beta y - \int \frac{A_x + B'_x . \beta + \ldots + P^{(n)}_x . \beta^n}{B_x + C'_x \beta + \ldots + P^{(n-1)}_x . \beta^{n-1}} dx} + \ldots$$

$$e^{-\int \frac{A_x}{B_x} dx} \left(E' + \int e^{\int \frac{A_x}{B_x} dx} . \frac{X}{B_x} dx\right).$$ In questa espressione la quantità β rimane indeterminata; e le E', E' sono due costanti arbitrarie.

§. 26. Se si riducesse in serie ordinata secondo le potenze di β, la quantità

$$Ee^{-\int \frac{A_x + B_x \beta + \ldots + P^{(n)}_x . \beta^n}{B'_x + C'_x \beta + \ldots + P^{(n-1)}_x . \beta^{n-1}} dx}$$ e questa serie si supponesse rappresentata da $T + T'\beta + T''\beta^2 +$ ec. funzioni conosciute di x, avremmo allora così espresso il valore di z

$$z = Te^{\beta y} + T'\beta e^{\beta y} + T''\beta^2 e^{\beta y} + \text{ec.} + e^{-\int \frac{A_x}{B_x} dx} \left(E' + \ldots\right.$$

$$\left.\int e^{\int \frac{A_x}{B_x} dx} . \frac{X}{B_x} dx\right).$$ Ora essendo u una funzione u_x di x, come pure z una funzione $z_{x,y}$ di x, y perciò facendo $x = 0$ nell' espressione

$z_{x,y} = u_x e^{\beta y} + z'_x$ avremo

$z_{0,y} = u_0 e^{\beta y} + z'_0$ onde

$e^{\beta y} = \frac{z_{0,y}}{u_0} - \frac{z'_0}{u_0}$. I valori adunque di $z_{0,y}$ rimangono indeterminati e al nostro arbitrio. Se per questo rappresentiamo per φy la quantità $\frac{z_{0,y}}{u_0} - \frac{z_0}{u_0}$, avremo $\varphi y = e^{\beta y}$; da cui si ricava in generale

$\beta^n e^{\beta y} = \frac{d^n \varphi y}{dy^n}$. L' espressione adunque di z si ridurrà alla seguente

$$z = T\varphi y + T' \frac{d\varphi y}{dy} + T'' \frac{d^2 \varphi y}{dy^2} + \text{ec.} + e^{-\int \frac{A_x}{B_x} dx} \left(E + \ldots \right.$$

$$\left. \int e^{\int \frac{A_x}{B_x} dx} \cdot \frac{X}{B_x} dx \right).$$

Questa rappresenterà l' integrale della proposta corredato di una funzione arbitraria φy. Perchè tale espressione di z potesse dirsi l' integrale completo della proposta, dovrebbe, secondo le idee ricevute dai Geometri contenere un numero n di funzioni arbitrarie. Io però non vedo come ciò si possa conseguire.

§. 27. L' equazione Generale proposta al §. 24. dipendendo dall' integrazione di due equazioni lineari (1), (2) del medesimo ordine che essa, potrà avere col nostro metodo un integrale completato col sufficiente numero di funzioni arbitrarie, ma però espresso per serie infinite.

Infatti supponghiamo che l' integrale completo dell' equazione (2) sia

$$u = b'F'(x,\beta) + b''F''(x,\beta) + b'''F'''(x,\beta) + \ldots + b^{(n)}F^{(n)}(x,\beta)$$

composto della somma n integrali particolari $bF(x,\beta)$, $b''F''(x,\beta)$, ec.; b, b', ec. sono costanti arbitrarie, e $F(x,\beta)$, $F'(x,\beta)$, ec. sono funzioni determinate diverse di x e β. Se si suppone che svolte queste funzioni in serie secondo le potenze di β si abbia

$$b'F'(x,\beta) = T + T'\beta + T''\beta^2 + \text{ec.}$$

$$b''F''(x,\beta) = T1 + T1'.\beta + T1''.\beta^2 + \text{ec.}$$

$$b'''F'''(x,\beta) = T2 + T2'.\beta + T2''.\beta^2 + \text{ec.}$$

. . . .

$$b^{(n)}F^{(n)}(x,\beta) = T(n-1) + T(n-1)'.\beta + T(n-2)''.\beta^2 +$$

ec., avremo perciò

$$z = Te^{\beta y} + T'\beta.e^{\beta y} + T''\beta^2.e^{\beta y} + \text{ec.}$$
$$+ T1.e^{\beta y} + T1'.\beta e^{\beta y} + T1''.\beta^2.e^{\beta y} + \text{ec.}$$
$$+ \text{ec.}$$

Ora, secondo quel che abbiamo detto al §. antecedente prendendo per $e^{\beta y}$ tante diverse funzioni $\varphi(y), \varphi'(y), \varphi''(y)$, ec. quante sono le serie diverse, s' avrà

$$z = T\varphi'(y) + T'\frac{d\varphi'(y)}{dy} + T''\frac{d^2\varphi'(y)}{dy^2} + \text{ec.}$$
$$+ T1.\varphi''(y) + T1'.\frac{d\varphi''(y)}{dy} + T1''.\frac{d^2\varphi''(y)}{dy^2} + \text{ec.}$$
$$+ \ldots\ldots$$

$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$+T(n-1).\varphi^{(n)}(y)+T'(n-1).\frac{d\varphi^{(n)}(y)}{dy}+T''(n-1)\times \ldots$

$\frac{d^2\varphi^{(n)}(y)}{dy^2}+$ ec. $+z'$; è manifesto che questa espressione contenendo n funzioni arbitrarie diverse rappresenterà l'integrale completo. Passiamo a fare alcuni esempi.

§. 28. S' abbia da integrare l' equazione del primo ordine

$$A_x z + B_x . \frac{dz}{dx} + B'_x . \frac{dz}{dy} = X,$$

Paragonando questa equazione con quella del §. 25., avremo il di lei integrale così espresso

$$z = e^{\beta y} . E . e^{X'+X''\beta} + e^{-\int \frac{A_x}{B_x} dx} . \int e^{\int \frac{A_x}{B_x} dx} . \frac{X}{B_x} dx, \text{ essendo}$$

$X' = -\int \frac{A_x}{B_x} dx$, e $X'' = -\int \frac{B'_x}{B_x} dx$. Sarà perciò

$z = e^{X'} . E . e^{\beta(y+X'')} + e^{X'} \int e^{-X'} . \frac{X}{B_x} dx$. Ora al §. 26. abbiamo veduto che si può prendere $\varphi(y)$ per $e^{\beta y}$, e perciò $E\varphi(y+X'')$ per $E.e^{\beta(y+X'')}$, dunque l'integrale completo sarà così espresso

$z = Ee^{X'} \varphi(y+X'') + e^{X'} \int e^{-X'} . \frac{X}{B_x} dx$. La costante E può considerarsi contenuta entro la funzione arbitraria.

Sia ora da integrarsi l' equazione del secondo ordine

$-3x^2z+x^3\frac{dz}{dx}-2x\frac{dz}{dy}+x^2\frac{d^2z}{dxdy}=0$. Paragonata questa equazione con quella del §. 26., avremo $A_x=-3x^2$, $B_x=x^3$, $B'_x=-2x$, $C_x=x^2$, $X=0$, e tutti gl' altri coefficienti saranno zero. S' avrà pertanto

$$z=E.e^{\int\frac{3x^2+2x\beta}{x^3+x^2\beta}dx}.e^{\beta y};$$ e integrando

$$z=E.e^{\log(x^3+x^2\beta)}.e^{\beta y},$$ cioè

$$z=E.x^3e^{\beta y}+E.x^2e^{\beta y}\beta:$$ e per ciò che si è detto (§. 26),

$$z=x^3\phi(y)+x^2\frac{d\phi(y)}{dy}.$$

§. 29. Andiamo adesso a vedere una forma generale d' equazioni a coefficienti variabili, funzioni delle due variabili x e y, le quali sono suscettibili d' una integrazione completa. Noi tratteremo una equazione del terzo ordine, avvertendo che il metodo che useremo per questa, sarà adattabile ancora all' equazioni degl' ordini superiori. Sia pertanto proposta l' equazione.

$$\left.\begin{array}{l} Az + B(a+bx)\frac{dz}{dx} + C(a+bx)^2\frac{d^2z}{dx^2} + D(a+bx)^3\frac{d^3z}{dx^3} \\ + B'(a'+b'y)\frac{dz}{dy} + C'(a+bx)(a'+b'y)\frac{d^2z}{dxdy} + D'(a+bx)^2(a'+b'y)\frac{d^3z}{dx^2dy} \\ + C''(a'+b'y)^2\frac{d^2z}{dy^2} + D''(a+bx)(a'+b'y)^2\frac{d^3z}{dy^2dx} \\ + D'''(a'+b'y)^3\frac{d^3z}{dy^3} \end{array}\right\} = 0$$

nella quale A, B, C, ec., a, b, a', b', sono quantità costanti.

Per avere il valore di z che soddisfaccia a quest' equazione, si prenda

$z = E(a+bx)^m(a'+b'y)^n$, nella quale E, m, n sono quantità costanti da determinarsi, e si troverà, dopo aver sostituito il valore di z e dei suoi differenziali nella proposta e averla divisa per $E(a+bx)^m(a'+b'y)^n$, la seguente equazione fra le costanti m ed n, del terzo grado

$$\left.\begin{array}{l} A + Bm.b + Cm(m-1).b^2 + Dm(m-1)(m-2).b^3 \\ + B'n.b' + C'n.b'.mb + D'nb'.m(m-1).b^2 \\ + C''n(n-1)b'^2 + D''n(n-1).b'^2.mb \\ + D'''n(n-1)(n-2).b'^3 \end{array}\right\} = 0;$$

si vede adunque che delle due quantità m ed n, una rimarrà indeterminata, e l'altra sarà data per quella, cui potremo dare il valore che più ci piace. La costante E rimane ancora essa al nostro arbitrio.

Siano adunque N, N', N'' i tre valori di m, espressi in fun-

zioni di n e dei coefficienti A, B, ec., e troveremo allora per z queste tre espressioni

$$z=(a+bx)^{N}(a'+b'y)^{n}.E,$$

$$z=(a+bx)^{N'}(a'+b'y)^{n}.E',$$

$$z=(a+bx)^{N''}(a'+b'y)^{n}.E''.$$

Ora essendo l' equazione proposta lineare soddisfarà ancora ad essa la somma di quelle tre espressioni, ciò che ci dà

$$z=(a+bx)^{N}(a'+b'y)^{n}.E+(a+bx)^{N'}(a'+b'y)^{n}.E'+(a+bx)^{N''}(a'+b'y)^{n}.E'',$$ nella quale sono arbitrarie le costanti E, E', E'', come pure è al nostro arbitrario la quantità n che si può prendere diversa in ciascun termine. Questa espressione però di z non può essere presa per l' integrale completo della proposta, poichè non contiene funzioni arbitrarie. E' evidente che questo metodo adoprato per una equazione di terzo ordine, s' estende anche all' equazioni degl' ordini superiori.

§. 30. Se i coefficienti A, B, C, ec. fossero di questa forma $A=A$, $B=\frac{B}{b}$, $B'=\frac{B}{b'}$, $C=\frac{C}{b^2}$, $C'=\frac{2C}{bb'}$, $C''=\frac{C}{b'^2}$, $D=\frac{D}{b^3}$, $D'=\frac{3.D}{b^2.b'}$, $D''=\frac{3.D}{bb'^2}$, $D'''=\frac{D}{b'^3}$, l' equazione proposta diverrebbe

$$\left.\begin{aligned}
&Az+\\
&B\left(\frac{1}{b}(a+bx)\frac{dz}{dx}+\frac{1}{b'}(a'+b'y)\frac{dz}{dy}\right)+\\
&C\left(\frac{1}{b^2}(a+bx)^2\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2}{bb'}(a+bx)(a'+b'y)\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{1}{b'^2}(a'+b'y)^2\frac{d^2z}{dy^2}\right)+\\
&D\left(\frac{1}{b^3}(a+bx)^3\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{3}{b^2b'}(a+bx)^2(a'+b'y)\frac{d^3z}{dx^2dy}+\frac{3}{bb'^2}(a+bx)(a'+\right.\\
&\left.b'y)^2\frac{d^3z}{dxdy^2}+\frac{1}{b'^3}(a'+b'y)^3\frac{d^3z}{dy^3}\right)
\end{aligned}\right\}=0$$

ed egualmente l' espressione di z che vi soddisfarebbe, è

$z=(a+bx)^m\,(a'+b'y)^n\,E$, essendo fra m ed n questa equazione

$$\left.\begin{aligned}
&A+Bm+Cm(m-1)+Dm(m-1)(m-2)\\
&\quad+Bn+2Cn.m\quad+3Dn.m(m-1)\\
&\qquad+Cn.(m-1)+3Dn.(n-1).m\\
&\qquad\qquad+Dn.(n-1)(n-2)
\end{aligned}\right\}=0,$$

ovvero

$A+B(m+n)+C(m(m-1)+2n.m+n(n-1))+D(m(m-1)(m-2)+3n.(m-1)m+3n(n-1).m+n(n-1)(n-2))=0$. Se questa equazione risoluta nei suoi fattori è

$(m-gn-h)(m-g'n-h')(m-g''n-h'')=0$, l' espressione per z sarà

$$z=(a+bx)^{h}((a+bx)^{g}(a'+b'y))^{n}E+(a+bx)^{h'}((a+bx)^{g'}(a'+b'y))^{n}E'+(a+bx)^{h''}((a+bx)^{g'}(a'+b'y))E''.$$

In questo caso però le costanti E, E', E'', possono supporsi funzioni di $\frac{a+bx}{a'+b'y}$ e così l'integrale diviene completo; infatti fatta

$E=\varphi\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}\right)$ e sostituiti i differenziali di z nell' equazione, si trova, che i coefficienti delle differenziali di E, s' elidono da se medesimi e tutto passa come se E fosse costante. Per convincersene, osserviamo che fatta

$z=(a+bx)^{m}(a'+b'y)^{n}\varphi\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}\right)$, e supposto

$$d.\varphi(\omega)=\varphi'(\omega)\left(\frac{d\omega}{dx}dx+\frac{d\omega}{dy}dy\right)$$

$d.\varphi'(\omega)=\varphi''(\omega)\left(\frac{d\omega}{dx}dx+\frac{d\omega}{dy}dy\right)$ ec., si ha (scrivendo φ per $\varphi\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}\right)$ ec.)

$$\frac{dz}{dx}=m(a+bx)^{m-1}(a'+b'y)^{n}.b.\varphi+(a+bx)^{m}(a'+b'y)^{n-1}.b.\varphi'$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=m(m-1)(a+bx)^{m-2}(a'+b'y)^{n}.b^2.\varphi+2m(a+bx)^{m-1}(a'+b'y)^{n-1}.b^2.\varphi'+(a+bx)^{m}(a'+b'y)^{n-2}\times b^2.\varphi''.$$

$$\frac{dz}{dy} = n(a+bx)^{m}(a'+b'y)^{n-1}.b'.\varphi - n(a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-2}.b'.\varphi'$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = n(n-1)(a+bx)^{m}(a'+b'y)^{n-2}.b'^2.\varphi - 2(n-1)(a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-3}.b'^2.\varphi' + (a+bx)^{m+2}(a'+b'y)^{n-4}.b'^2.\varphi''$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = mn(a+bx)^{m-1}(a'+b'y)^{n-1}.bb'.\varphi - m(a+bx)^{m}(a'+b'y)^{n-2}.bb'.\varphi' + (n-1)(a+bx)^{m}(a'+b'y)^{n-2}.bb'.\varphi' - (a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-2}.bb'.\varphi''.$$

Se adesso i valori di questi differenziali si sostituiscono nella proposta, avremo la medesima equazione che nel caso di E quantità costante, aumentato però il primo membro dei termini

$$B\left((a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-1}.\varphi' - (a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-1}\times\varphi'\right) + C\left(2m(a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-1}\varphi' + (a+bx)^{m+2}(a'+b'y)^{n-2}.\varphi'' - 2m(a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-1}.\varphi' - 2(a+bx)^{m+2}(a'+b'y)^{n-2}.\varphi'' + 2(n-1)(a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-1}.\varphi' + (a+bx)^{m+2}(a'+b'y)^{n-2}.\varphi'' - 2(n-1)(a+bx)^{m+1}(a'+b'y)^{n-1}\times\varphi''\right) + D(\text{ ec.}$$

ed è evidente che questi termini vanno a zero da se medesimi; l' integrale adunque completo della proposta nel caso in cui si parla sarà

$$z=(a+bx)^h\left((a+bx)^g(a'+b'y)\right)^n.\Psi'\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}\right)+(a+bx)^{h'}\left((a+bx)^{g'}(a'+b'y)\right)^n.\Psi''\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}\right)+(a+bx)^{h''}\left((a+bx)^{g''}(a'+b'y)\right)^n.\Psi'''\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}\right)$$

esprimendo per Ψ', Ψ'', Ψ''' tre funzioni arbitrarie diverse della quantità $\frac{a+bx}{a'+b'y}$. Siccome la quantità n rimane indeterminata, perciò la si può supporre $=0$, e l' integrale completo viene più semplice.

§. 31. Ancora l' equazione,

$$\left.\begin{array}{r} Az+B(ax+by)\frac{dz}{dx}+C(ax+by)^2\frac{d^2z}{dx^2}+\text{ec.} \\ +B'(ax+by)\frac{dz}{dy}+C'(ax+by)^2\frac{d^2z}{dxdy}+\text{ec.} \\ +C''(ax+by)^2\frac{d^2z}{dy^2}+\text{ec.} \end{array}\right\}=0$$

ammette un integrale ma non completato da una funzione arbitraria, almeno facendo uso del metodo seguente.

Sia $z=E(ax+by)^m$; sostituendo il valore di z colle sue differenze parziali nella equazione proposta, e dividendola per $E(ax+by)^m$, avremo

A+

$$\left.\begin{array}{l} A + B m a + C\, m(m-1) a^2 + \text{ec.} \\ \quad + B' m b + C' m(m-1) ab + \text{ec.} \\ \qquad + C'' m(m-1) b^2 + \text{ec.} \end{array}\right\} = 0,$$

e per determinare m avremo l' equazione

$A + m(Ba + B'b) + m(m-1)(Ca^2 + C'ab + C''b^2) + \text{ec.} = 0$, la quale darà dei valori particolari di m, e questi daranno delle espressioni particolari per z, la somma delle quali formerà un' integrale particolare della proposta Quest' equazione è integrata all' Articolo IX. della Memoria del Sig. La Place sopra l' integrali delle equazioni lineari, Atti di Parigi del 1773.

§. 32. Se il secondo membro dell' equazione del §. 30. invece di essere zero, fosse una funzione $\varphi(x,y)$ di x,y, ponendo in essa $\frac{a+bx}{b} - \frac{a}{b}$ invece di x, e $\frac{a'+b'y}{b'} - \frac{a'}{b'}$ invece di y, la si ridurrebbe ad una funzione di $a+bx$, $a'+b'y$ che possiamo rappresentare per $F(a+bx, a'+b'y)$, alla quale si può anche dare questa forma $F\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}, a'+b'y\right)$, avendovi posto $\frac{a+bx}{a'+b'y}(a'+b'y)$ invece di $a+bx$; e così il secondo membro $\varphi(x,y)$ può sempre ridursi ad una funzione di $\frac{a+bx}{a'+b'y}$ e di $a'+b'y$. Per avere allora l' integrale si faccia

$z = (a+bx)^m (a'+b'y)^n \Psi'\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}\right) + Y$, essendo Y una fun-

zione incognita di y. Sostituendo questo valore nella proposta s' avrà per determinare Y l' equazione

$$AY + B\frac{1}{b'}(a' + b'y)\frac{dY}{dy} + C\frac{1}{b'^2}(a' + b'y)^2\frac{d^2Y}{dy^2} + D\frac{1}{b'^3}(a' + b'y)^3\frac{d^3Y}{dy^3} = F'\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}, a' + b'y\right)$$: questa equazione s' integra (Cap. II., §. 19.) considerando in F' come costante la quantità $\frac{a+bx}{a'+b'y}$, poichè i di lei differenziali sostituiti nell' equazione proposta si distruggono da se medesimi, e s' avrà così il valore completo di Y, il quale aggiunto all' espressione completa di z trovata al §. 30., ci darà l'. integrale per il caso di cui si tratta.

Se i Coefficienti A, B, C, ec. della medesima equazione del §. 30., fossero funzioni di $\frac{a+bx}{a'+b'y}$, gl' integrali avrebbero la medesima forma; poichè quantunque l' equazione che allora determina m abbia i coefficienti variabili e che perciò dia m eguale ad una funzione di $\frac{a+bx}{a'+b'y}$, pure questo valore di m è come se fosse costante, giacchè i di lui differenziali moltiplicati per i coefficienti dell' equazione proposta si distruggerebbero da se medesimi e tutto passerebbe egualmente che se m non fosse variabile. Sarà facile persuadersene prendendo le differenziali di

$$z = (a + bx)^{F\frac{a+bx}{a'+b'y}}(a' + b'y)^n \varphi\left(\frac{a+bx}{a'+b'y}\right)$$, (la funzione F esprime il valore di m che è dato dall' equazione fra m ed n) e sostituendole nella proposta. I termini ove si trovano

le differenziali di F, φ si distruggono da se medesimi. Ancora i coefficienti dell' equazione che determina Y sono funzioni di $\frac{a+bx}{a'+b'x}$, ma si possono considerare come costanti, poichè le differenziali rapporto ad $\frac{a+bx}{a'+b'y}$, le quali porterebbe nella proposta la differenziazione di Y, vanno a zero da se medesime. Potremo adunque sempre avere l' integrale completo, ancora nel caso che i coefficienti siano variabili, ma della forma prescritta ed il secondo membro funzione qualunque di x, y.

§. 33. Se nell' equazione del §. 30., facciamo $a=a'=o$, $b=b'=1$, sarà $\frac{a+bx}{a'+b'y}=\frac{x}{y}$, così quell' equazione si cangerà in questa (purchè però gli si suppongano i coefficienti variabili funzioni di $\frac{x}{y}$, e il secondo membro funzione qualunque data di x, y)

$$\vartheta(x,y) = F'\left(\frac{x}{y}\right)z + F''\left(\frac{x}{y}\right)\left(x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}\right)+F'''\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\left(x^2\frac{d^2z}{dx^2}+2xy\cdot\frac{d^2z}{dxdy}+y^2\frac{d^2z}{dy^2}\right)+F''''\left(\frac{x}{y}\right)\left(x^3\frac{d^3z}{dx^3}+3x^2y\times\right.$$
$$\left.\frac{d^3z}{dx^2dy}+3xy^2\cdot\frac{d^3z}{dxdy^2}+y^3\frac{d^3z}{dy^3}\right),$$ il di cui integrale completo sarà adunque

$$z=x^{f\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot y^n\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+x^{f'\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot y^n\cdot\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)+x^{f''\left(\frac{x}{y}\right)}\times\ldots$$
$$y^n\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)+Y,$$ nella quale f, f', f'', sono tre funzioni

di $\frac{x}{y}$, che esprimono i tre valori di m, dati dall' equazione fra m ed n che è del terzo grado. Le funzioni φ, φ', φ'', come pure la n dipendono dal nostro arbitrio. La Y è data da questa equazione

$$F'\left(\frac{x}{y}\right).Y+F''\left(\frac{x}{y}\right).y\frac{dY}{dy}+F'''\left(\frac{x}{y}\right).y^2\frac{d^2Y}{dy^2}+F''''\left(\frac{x}{y}\right).y^3\frac{d^3Y}{dy^3}=$$

$$\theta'\left(\frac{x}{y}, y\right),$$ nella quale la quantità $\frac{x}{y}$ si suppone costante.

E' chiaro che il metodo medesimo si estende anche agl' ordini superiori, e si può perciò concludere che sarà sempre completamente integrabile una equazione a differenze infinitesime e parziali dell' ordine n a coefficienti variabili; purchè questi seguano la legge dei coefficienti di quella di terzo grado sopra integrata; cioè la fila delle differenze n^{esime} sia

$$F^{(n)}\left(\frac{x}{y}\right)\left(x^n.\frac{d^nz}{dx^n}+nx^{n-1}y.\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.y^2\times\ldots\right.$$

$$\left.\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}+\ldots+y^n.\frac{d^nz}{dy^n}\right).$$

Tale equazione, la quale è un corollario di quella del §. 30., forma il secondo ed ultimo caso di cui fin ora i Geometri hanno dato una soluzione completa.

Siccome n rimane indeterminata, si può perciò semplicizzare l'integrale completo facendo $n=0$: l' equazione che determina m si riduce allora alla seguente

$A+Bm+Cm(m-1)+Dm(m-1)(m-2)\ldots=0$, che è u-

na equazione del medesimo grado che l' ordine della proposta.

§. 34. Per fare una applicazione si abbia da integrare l' equazione

$$xy - a\frac{x^2}{y^2}z + \left(-(a+1)\frac{x}{y}+1\right)\left(x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}\right) + x^2\frac{d^2z}{dx^2}+2xy\times$$

$\frac{d^2z}{dxdy}+y^2\frac{d^2z}{dy^2}=0$, la quale è del secondo ordine e porta adunque alla risoluzione di una equazione del secondo grado $A + Bm + Cm(m-1) = 0$. Ora $A = a\frac{x^2}{y^2}$, $B = 1-(a+1)\frac{x}{y}$, $C = 1$, avremo adunque per determinare m

$a\frac{x^2}{y^2}-(a+1)\frac{x}{y}m+m^2=0$, dalla quale si ricava $m=\frac{x}{y}$, $m=a\frac{x}{y}$; perciò l' integrale completo sarà $z=x^{\frac{x}{y}}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\ldots$ $x^{a\frac{x}{y}}.\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)+Y$. La quantità Y è data da questa equazione lineare

$a\frac{x^2}{y^2}.Y+\left(1-(a+1)\frac{x}{y}\right)y.\frac{dY}{dy}+y^2\frac{d^2Y}{dy^2}=\frac{x}{y}.y^2$, la quale s' integra supponendo $\frac{x}{y}$ una quantità costante. L' integrale di questa equazione si ha da ciò che abbiamo detto al §. 20., Cap. II. si tratterebbero con i medesimi metodi l' equazioni ad un più gran numero di variabili. Non ce ne occuperemo.

§. 35. Quando i coefficienti A, B, C, ec. dell' equazione del §. 2. fossero funzioni qualunque di x e di y i me-

todi che abbiamo dati non sarebbero sufficienti per ritrovarne l' integrale completo. Se il volume di questo libro non fosse andato al di là di quello che si pensava ci saremmo occupati nel trattare tali equazioni. Noi adunque sopprimiamo quello che avevamo scritto su questo punto, molto più che non avendo potuto immaginare alcun metodo, che ci portasse a risultati più generali e più estesi dei già conosciuti, tutto si riduceva ad una esposizione dei metodi che i più celebri Geometri la-Grange, la-Place, Monge, ec. ed altri hanno dati per questo, metodi che i nostri leggitori potranno trovare nelle opere di questi Autori (*a*)

F I N E.

(*a*) La-Place, Atti di Parigi 1773.
La-Gerdre detti 1787.
Monge detti 1784.
Cousin, Calcolo Infinitesimale.
Marie, Elementi di Matematiche ec.

APPENDICE

AI CAPITOLI II. E IV.

§. 1. AL §. 15. del Cap. II. s' incomincia a parlare dell' integrale dell' equazioni lineari a coefficienti variabili, ed il metodo che vi è dato per l' integrazione di tali equazioni, ci porta a concludere che se si può trovare un numero n d' integrali particolari o l' integrale completo di una equazione dell' ordine n, quando il di lei secondo membro è nullo, se ne avrà sul momento l' integrazione completa nel caso che il medesimo secondo membro sia X funzione di x, che è tutto ciò che si sapeva circa tali equazioni: ora come trovare questo integrale completo? I Geometri non hanno fatto fin ora alcun passo in questa ricerca, se s' eccettui il caso particolare di cui si parla al §. 19. del Cap. citato.

Il metodo che espongo in questa Appendice, perchè da me immaginato dopo la stampa del superiore Trattato, ha il vantaggio di dare in infiniti casi quest' integrale completo. Questo è fondato sopra la variazione delle costanti, artifizio di cui hanno fatto un felicissimo uso i celebri Geometri la-Grange, la-Place, ed altri.

§. 2. Sia pertanto da integrarsi l' equazione del secondo ordine

$ay + b\frac{dy}{dx} + c\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ nella quale a, b, c si suppongono varia-

bili. Si sa che se questi coefficienti fossero costanti, l' integrale completo sarebbe

$y = \beta e^{\alpha x} + \beta' e^{\alpha' x}$ essendo β, β' due costanti arbitrarie, e α, α' le radici di questa equazione

$a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$, giacchè la proposta sarebbe pienamente sodisfatta ponendovi per y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ questi valori

$$y = \beta e^{\alpha x} + \beta' e^{\alpha' x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \beta e^{\alpha x} \alpha + \beta' e^{\alpha' x} \alpha'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \beta e^{\alpha x} \alpha^2 + \beta' e^{\alpha' x} \alpha'^2.$$

Ora nel caso dei coefficienti variabili facendo anche

$y = \beta e^{\alpha x} + \beta' e^{\alpha' x}$, le quantità α, α' divengono variabili, e perciò danno alcuni termini differenziali nei valori di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, e con la sostituzione di detti valori l' equazione proposta non essendo più sodisfatta, segue che quel valore dell' y non ne è più l' integrale completo.

Il metodo di far variare le costanti somministra il rimedio a questo inconveniente. Supponghiamo infatti che nel caso dei coefficienti variabili, le quantità β, β', nell' integrale

$y = \beta e^{\alpha x} + \beta' e^{\alpha' x}$, invece di essere costanti siano variabili indeterminate, e α, α' siano variabili date dall' equazione

$a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$. Determiniamo β, β' in modo che i valori di

di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ siano i medesimi come se $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ fossero quantità costanti: è allora evidente che

$y = \beta e^{\alpha x} + \beta' e^{\alpha' x}$ continuerà ad essere l' integrale della proposta. Si differenzi adunque il valore di y facendo tutto variare ed avremo

$\frac{dy}{dx} = \beta e^{\alpha x} \alpha + \beta' e^{\alpha' x} \alpha' + e^{\alpha x} \left(\frac{d\beta}{dx} + \beta x \frac{d\alpha}{dx} \right) + e^{\alpha' x} \left(\frac{d\beta'}{dx} + \ldots \right.$
$\left. \beta' x \frac{d\alpha'}{dx} \right)$ il quale si riduce a

$\beta e^{\alpha x} \alpha + \beta' e^{\alpha' x} \alpha'$ facendo

$e^{\alpha x} (d\beta + \beta x d\alpha) + e^{\alpha' x} (d\beta' + \beta' x d\alpha')$, ovvero

$(1) \ldots e^{\alpha x} d\beta + e^{\alpha' x} d\beta' + \beta e^{\alpha x} x d\alpha + \beta' e^{\alpha' x} x d\alpha' = 0$. Se ora si differenzia

$\frac{dy}{dx} = \beta e^{\alpha x} \alpha + \beta' e^{\alpha' x} \alpha'$ facendo tutto variare, s' avrà

$\frac{d^2y}{dx^2} = \beta e^{\alpha x} . \alpha^2 + \beta' e^{\alpha' x} \alpha'^2 + e^{\alpha x} \left(\alpha \frac{d\beta}{dx} + \beta \alpha x \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\alpha}{dx} \right) +$
$e^{\alpha' x} \left(\alpha' \frac{d\beta'}{dx} + \beta' \alpha' x \frac{d\alpha'}{dx} + \beta' \frac{d\alpha'}{dx} \right)$, il quale si riduce ai primi due termini facendo

$e^{\alpha x} (\alpha d\beta + \beta \alpha x d\alpha + \beta d\alpha) + e^{\alpha' x} (\alpha' d\beta' + \beta' \alpha' x d\alpha' + \beta' d\alpha') =$
0, ovvero

$(2) \ldots e^{\alpha x} \alpha d\beta + e^{\alpha' x} \alpha' d\beta' + \beta e^{\alpha x} (\alpha x + 1) d\alpha + \beta' e^{\alpha' x} (\alpha' x +$
$1) d\alpha' = 0$.

Per mezzo delle due equazioni lineari del primo ordine,

(1), (2) si determineranno le costanti β, β' divenute variabili prendendone gl' integrali completi. I valori adunque di β, β' conterranno ciascuno una costante arbitraria, e però

$y = \beta e^{\alpha x} + \beta' e^{\alpha' x}$ rappresenterà sempre l' integrale completo della proposta.

Ecco adunque la regola per integrare una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti variabili „ s' integri la pro-
„ posta come se i di lei coefficienti fossero costanti, quindi
„ invece delle due costanti arbitrarie che porta quell' inte-
„ grazione si prendano due funzioni β, β' di x date dall' e-
„ quazioni (1), (2) „.

§. 3. Per farne una applicazione sia proposta l' equazione

$xy - (x + 1)\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$: integrata come se i coefficienti fossero costanti avremo

$y = \beta e^{\alpha x} + \beta' e^{\alpha' x}$, essendo α, α' le radici di questa equazione

$x - (x + 1)\alpha + \alpha^2 = 0$ che ci dà $\alpha = x, \alpha' = 1$ e però

$y = \beta e^{xx} + \beta' e^{x}$. Per trovare β, β' si sostituiscano nelle equazioni (1), (2) per $\alpha, \alpha', d\alpha, d\alpha'$ i loro valori ed avremo

$e^{xx} d\beta + e^{x} d\beta' + \beta e^{xx} x dx = 0$.

$e^{xx} x d\beta + \beta e^{xx} . xx dx + \beta e^{xx} dx + e^{x} d\beta' = 0$ per determinare β, β'. Se si sottra la prima di queste equazioni dalla seconda avremo, dopo avere divisa la differenza per e^{xx}, $(x - 1) d\beta + (xx + 1 - x)\beta dx = 0$, che si riduce a

$\frac{d\beta}{\beta} + x dx + \frac{dx}{x - 1} = 0$ dalla quale si ricava integrando $\beta =$

$\frac{Ce^{-\frac{xx}{2}}}{x-1}$ essendo C una costante arbitraria.

Se ora si sostituisce il valore di β e della sua differenziale nella prima equazione, avremo per determinare β' la seguente

$$d\beta' = -\frac{Ce^{-\frac{xx}{2}}}{x-1}\left(-\frac{e^{x(x-1)}(x^2-x+1)}{x-1}dx + e^{x(x-1)}\,x\,dx\right) \text{ ovvero}$$

$$d\beta' = C\frac{e^{\frac{xx-2x}{2}}}{(x-1)^2}dx,$$

$\beta' = \int C\frac{e^{\frac{xx-2x}{2}}}{(x-1)^2}dx + C'$ essendo C' costante arbitraria: l' integrale adunque della proposta sarà

$$y = C\frac{e^{-\frac{xx}{2}}}{x-1}.e^{xx} + \left(C\int\frac{e^{\frac{xx-2x}{2}}}{(x-1)^2}dx + C'\right)e^x \text{ ovvero}$$

$y = C\left(\frac{e^{\frac{xx}{2}}}{x-1} + e^x\int\frac{e^{\frac{xx-2x}{2}}}{(x-1)^2}dx\right) + C'e^x$; integrando per parti la quantità che è sotto il segno integrale, e riducendo ciò che si trova fra le parentesi, si ha

$y = Ce^x\int e^{\frac{xx-2x}{2}}dx + C'e^x$; e questa espressione di y sarà l' integrale completo poichè contiene le due costanti arbitrarie C, C'.

§. 4. E' facile verificare tutto questo per mezzo della differenziazione: infatti si ha

$$\frac{dy}{dx} = Ce^x\int e^{\frac{xx-2x}{2}}dx + Ce^{\frac{xx}{2}} + C'e^x$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = Ce^x \int e^{\frac{xx-2x}{2}} dx + Ce^{\frac{xx}{2}}(x+1) + C'e^x$ e queste espressioni di y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sostituite nella proposta la rendono identica.

§. 5. Si può fare uso del medesimo metodo per le equazioni degl' ordini superiori, ma noi non ce ne occuperemo: è però necessario fare qualchè rifflessioue sopra un tal metodo. Abbiamo veduto al §. 2. che per integrare una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti variabili, tutto si riduceva a trovare i valori di β, β' per mezzo delle equazioni (1),(2): ora in generale eliminando una di queste variabili per mezzo di tali equazioni (§. 25. Cap. II.), l' altra verrà determinata da una equazione lineare di secondo ordine a coefficienti variabili, che essendo del medesimo ordine della proposta, ci porta alla medesima difficoltà che aveva la proposta medesima.

Accade però in moltissimi casi che si può da quelle due equazioni eliminare una delle variabili β, β', l' altra venendo data per una equazione lineare del primo ordine, (come nell' esempio che si è fatto) la quale essendo sempre integrabile completamente, la proposta perciò si potrà integrare senza alcuna difficoltà. L' equazione

$$m\varphi(x).y - (\varphi(x) + m\Psi(x)).\frac{dy}{dx} + \Psi(x).\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

nella quale $\varphi(x), \Psi(x)$ rappresentano funzioni qualunque date della variabile x, ed m costante, è in questo caso, e perciò di essa se ne può sempre avere l' integrale completo. Si faccia un simil discorso per l' equazioni dei superiori ordini, alle quali s' applichi il metodo sopra esposto.

§. 6. Si può ancora fare uso del medesimo nelle integrazioni delle equazioni lineari a differenze parziali a coefficienti variabili, delle quali si parla al §. 24. del Cap. IV. s' incominci dalle equazioni del primo ordine. Sia da integrarsi l' equazione

$az - \frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 0$ nella quale a, b siano funzioni date di x.

Se a, b fossero costanti soddisfarebbe ad essa $z = \gamma\, e^{\alpha x + \beta y}$ essendo γ una costante arbitraria, β rimanendo indeterminata, e $\alpha = a + b\beta$. Supponghiamo che nel caso della variabilità dei coefficienti l'integrale abbia la medesima forma, ma γ invece di essere costante sia funzione di x. Avremo allora

$$\frac{dz}{dx} = \gamma e^{\alpha x + \beta y}\alpha + e^{\alpha x + \beta y}\left(\gamma x\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dx}\right)$$

$\frac{dz}{dy} = \gamma e^{\alpha x + \beta y}\beta$. Se noi facciamo $\gamma x d\alpha + d\gamma = 0$ allora avremo per $\frac{dz}{dy}, \frac{dz}{dx}$ i medesimi valori come se α fosse stata costante. Si ricava da quella equazione $\gamma = Ce^{-\int x d\alpha}$ essendo C costante arbitraria. Avremo adunque $z = Ce^{-\int x d\alpha + \beta y + \alpha x}$, e sostituendo per α il suo valore $a + b\beta$, s'avrà

$z = Ce^{-\int x da - \beta\int x db} . e^{ax + \beta bx + \beta y}$, ovvero

$z = Ce^{\int a dx + \beta\int b dx + \beta y}$. Ora se nella formola

$z_{x,y} = \gamma e^{\alpha x + \beta y}$ si fa $x = 0$, si ha (chiamando γ' ciò che diviene γ) $z_{0,y} = \gamma' e^{\beta y}$, dal che si deduce, come abbiamo detto al §. 4. Cap. IV. $e^{\beta y} = \varphi(y)$ e perciò $e^{\beta(\int b dx + y)} = \varphi(\int b dx + y)$: il valore adunque di z sarà

$z = Ce^{\int a dx}\varphi(\int b dx + y)$, o semplicemente

$z = e^{\int a dx}\varphi(\int b dx + y)$, che sarà l' integrale completo del-

la proposta, poichè per φ s' intende una funzione arbitraria di ciò che vi è fra le parentesi. Questo combina con quello che si è detto al §. 28. del Cap. IV.

§. 7. Passiamo alle equazioni di secondo ordine. Sia l'equazione

$$\left.\begin{aligned} Az + B\frac{dz}{dx} + C\frac{d^2z}{dx^2} \\ + B'\frac{dz}{dy} + C'\frac{d^2z}{dxdy} \\ + C''\frac{d^2z}{dy^2} \end{aligned}\right\} = 0$$

la quale abbia i coefficienti variabili. Se i coefficienti fossero costanti soddisfarebbero ad essa (§. 4. Cap. IV.)

$z = \gamma e^{\alpha x + \beta y} + \gamma' e^{\alpha' x + \beta y}$, essendo γ, γ' due costanti arbitrarie, β una costante indeterminata, e α, α' i due valori di α, che si ricavano da questa equazione

$A + B\alpha + C\alpha^2 + B'\beta + C'\alpha\beta + C''\beta^2 = 0$,

Essendo A, B, ec. funzioni di x, i due valori di α divengono ancora essi funzioni di x. Perchè l' integrale in questo caso si mantenga della medesima forma, supponghiamo che le costanti γ, γ' divengano variabili, e determiniamole in modo, che i termini differenziali relativi ai γ e α nei valori di $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ si distruggano da se medesimi, ed allora il valore di z si manterrà lo stesso che nel caso dei coefficienti costanti. Per adempire a quella condizione è facile vedere che dobbiamo fare

(1) . . . $e^{\alpha x} d\gamma + e^{\alpha x}.\gamma x d\alpha + e^{\alpha' x} d\gamma' + e^{\alpha' x}.\gamma' x d\alpha' = 0$

(2) . . . $e^{\alpha x} \alpha d\gamma + e^{\alpha x}(\alpha x + 1)\gamma d\alpha + e^{\alpha' x} \alpha' d\gamma' + e^{\alpha' x} \times$

$(\alpha' x + 1)\gamma' d\alpha = 0$, per mezzo delle quali si determineranno le costanti γ, γ' divenute variabili, le quali si sostituiranno nell' espressione della z.

§. 8. Facciamone un esempio. Sia proposta l' equazione

$$-x^2 \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} + 3x^2 \frac{dz}{dy} - 6 \frac{d^2z}{dxdy} + 9 \frac{d^2z}{dy^2} = 0 .$$ S' avrà

$z = \gamma e^{\alpha x + \beta y} + \gamma' e^{\alpha' x + \beta y}$, essendo α, α' le radici di questa equazione $\alpha^2 - \alpha x^2 - 6\alpha\beta + 3x^2\beta + 9\beta^2 = 0$, e perciò $\alpha = x^2 + 3\beta$, $\alpha' = 3\beta$, e γ, γ', date da queste equazioni

$$e^{\alpha x} d\gamma + e^{\alpha x} \gamma x d\alpha + e^{\alpha' x} d\gamma' = 0$$

$$e^{\alpha x} \alpha d\gamma + e^{\alpha x} \gamma(\alpha x + 1) d\alpha + e^{\alpha' x} \alpha' d\gamma' = 0 .$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per α' e sottraendola dalla seconda, si ha dopo averne divisa la differenza per $e^{\alpha x}$

$(\alpha - \alpha') d\gamma + \gamma(\alpha x + 1 - \alpha' x) d\alpha = 0$ dalla quale si ricava

$\gamma = C \frac{e^{-\int x d\alpha}}{\alpha - \alpha'}$, essendo C una costante arbitraria. Sostituendo questo valore di γ nella prima equazione, s' avrà,

$$e^{\alpha' x} d\gamma' = C \frac{e^{-\int x d\alpha + \alpha x}}{\alpha - \alpha'} \times \frac{\alpha x - \alpha' x + 1}{\alpha + \alpha'} d\alpha - C \frac{e^{\alpha x - \int x d\alpha}}{\alpha - \alpha'} . x d\alpha$$

da cui

$\gamma' = C \int \frac{e^{-\alpha' x + \int \alpha dx}}{(\alpha - \alpha')^2} d\alpha + C'$ essendo C' un altra costante arbitraria.

Ora sostituendo nei valori di γ, γ' per α, α', $d\alpha$ i suoi valori, s' avrà